Untersuchung geometrischer Strukturen in zellularen Netzwerken und Graphen im Hinblick auf eine Beschreibung der Feinstruktur der physikalischen Raumzeit auf der Planckskala

Diplomarbeit

vorgelegt von
Thomas Nowotny
aus
Kassel

angefertigt
am Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
1998

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein zentrales Ziel der Physik ist die vereinheitlichte Theorie aller in der Natur beobachtbaren Wechselwirkungen. Am Anfang dieses Jahrhunderts entstand die allgemeine Relativitätstheorie, die mittlerweile eine allgemein anerkannte Theorie der gravitativen Wechselwirkung ist. Auch für die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung wurden Theorien formuliert, die sich schließlich zu einer vereinheitlichten Theorie dieser Wechselwirkungen im Standardmodell der Elementarteilchenphysik zusammenfügen ließen. Trotz vieler offener konzeptioneller und mathematischer Fragen im Zusammenhang mit dem Standardmodell, ist auch diese vereinheitliche Theorie der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung weithin anerkannt. Es fehlt jedoch eine vereinheitlichte Theorie, die auch die gravitative Wechselwirkung umfaßt. Der Suche nach einer solchen „Theorie von Allem"(“theory of everything”) widmet man sich im Gebiet der Quantengravitation, in das diese Arbeit im weiteren Sinne eingeordnet werden kann.

Eine wichtige Beobachtung ist, daß allein die Betrachtung zweier grundlegender Prinzipien aus der Quantentheorie auf der einen und der allgemeinen Relativitätstheorie auf der anderen Seite schon dazu führt, daß eine Theorie, die beide umfaßt, im Gegensatz zu den einzelnen Theorien eine absolute kleinste auflösbare Skala besitzen muß. Denn um eine Länge ΔL aufzulösen, benötigt man nach den Gesetzen der Quantenmechanik ein Meßteilchen mit de-Broglie-Wellenlänge $\frac{hc}{E} \leq \Delta L$, wobei E die Energie des Meßteilchens, h das Plancksche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie besitzt ein solches Meßteilchen einen Schwarzschildradius $r_S = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Deshalb kann man nur Längen auflösen, für die $\frac{2GE}{c^4} \leq \Delta L$ gilt. Da die eine Abschätzung proportional zu E und die andere umgekehrt proportional zu E ist, gibt es ein absolutes Minimum der auflösbaren Länge bei

$$\frac{2GE}{c^4} = \frac{hc}{E} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sqrt{\frac{hc^5}{2G}}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta L \geq \frac{2G}{c^4}\sqrt{\frac{hc^5}{2G}} = \sqrt{\frac{2hG}{c^3}} =: \sqrt{2}\, l_P\,.$$

Die so definierte minimale Länge l_P ist die bekannte *Plancklänge*. Die entsprechende Energie $E_P = \sqrt{\frac{hc^5}{G}}$ heißt *Planckenergie*. Die Plancklänge ist die einzige Länge, die sich aus den drei fundamentalen Naturkonstanten h, G und c bilden läßt. Dies sehen viele Physiker als einen weiteren Hinweis auf eine fundamentale Bedeutung dieser Größe an. Obwohl die oben geschilderten Überlegungen allenfalls heuristisch sind, haben Argumente dieser Art einen beträchtlichen Anteil der Physiker davon überzeugt, daß die Physik auf der Planckskala in einer geeigneten Weise diskret beschrieben werden muß.
Sowohl die Plancklänge $l_P \approx 4 \cdot 10^{-33}\,\text{cm}$ als auch die Planckenergie $E_P \approx 3 \cdot 10^{19}\,\text{GeV}$ liegen weit jenseits aller experimentellen Möglichkeiten. Das übliche Schema der physikalischen Modellbildung

$$\text{Mathematik} \quad \rightleftharpoons \quad \text{Theorie} \quad \rightleftharpoons \quad \text{Konzepte} \quad \rightleftharpoons \quad \text{experimentelle Fakten}$$

ist in der Quantengravitation also des rechten Teils beraubt. Theorien der Quantengravitation müssen durch andere Argumente, die bis in die Philosophie hineinreichen können, gerechtfertigt werden. Sie wirken aus diesem Grund oft sehr spekulativ. Die Abwesenheit experimenteller Überprüfbarkeit erklärt auch, warum es so viele nicht-kompatible Ansätze in der Quantengravitation gibt. Im wesentlichen lassen sie sich unter folgende Rubriken zusammenfassen:

(i) Quantisierung der allgemeinen Relativitätstheorie,

(ii) Übertragung der Quantentheorie in den Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie,

(iii) Allgemeine Relativitätstheorie als Niedrig-Energie-Limes einer fundamentaleren Quantentheorie (etwa Stringtheorie, M-Theorie) und

(iv) Quantentheorie und Relativitätstheorie als effektive Theorien einer radikal andersartigen Theorie.

Eine detaillierte Übersicht über die Ansätze und Entwicklungen der Quantengravitation in den letzten Jahrzehnten findet man in [Ish].
Auch innerhalb der genannten Rubriken gibt es noch recht unterschiedliche Ansätze. Zu (iv) etwa gibt es den Ansatz der "Loop Quantum Gravity" [Rov] oder den von "Spin Networks" [Smo]. Eine Übersicht über solche modernen Ansätze findet man in [Gib].

Die Fragestellung dieser Arbeit entstand im Zusammenhang mit dem von Requardt entwickelten Ansatz der zellularen Netzwerke [Req3], der auch der Rubrik (iv) zuzuordnen ist. In diesem Ansatz wird die Diskretheit der Raumzeit auf Planckskala als grundlegend angesehen und nicht erst nachträglich durch ein Quantisierungsprogramm implementiert. Deshalb wählt man die inhärent diskrete Struktur eines zellularen Netzwerks zur Beschreibung der Raumzeit auf der Planckskala.

Ein zellulares Netzwerk ist eine Verallgemeinerung der bekannten zellularen Automaten. Es ist geometrisch ein ungerichteter Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ (siehe Definition 2.1). An jedem Vertex und an jeder Kante gibt es einen inneren Zustandsraum, der typischerweise auch diskret ist. Ein lokales Netzwerkgesetz bestimmt, wie sich die Zustände an Vertizes und Kanten in Abhängigkeit von einer zunächst abstrakten Schaltzeit verändern. Aus der Theorie der zellularen Automaten ist bekannt, daß schon die einfachsten Modelle äußerst komplexes Verhalten zeigen. So ist etwa das einfache Modell des "Game of Life" von Conway [BCG] schon eine universelle Turingmaschine. Es ist deshalb sinnvoll, die typischen Eigenschaften zellularer Netzwerke, die prinzipiell schon komplizierter als zellulare Automaten sind, an einem einfachen Beispielmodell zu studieren. Ein solches "toy-model" wurde von Requardt [Req3] vorgeschlagen. Der innere Zustandsraum an den Vertizes ist in diesem Modell $\mathbb{Z}$ und der an den Kanten $\{-1, 0, 1\}$. Der Zustand des Netzwerks zur Schaltzeit τ wird dann durch Abbildungen $s : V \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(n_i, \tau) \mapsto s_i(\tau)$ und $J : E \times \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$, $(b_{ik}, \tau) \mapsto J_{ik}(\tau)$ beschrieben. Ein mögliches Netzwerkgesetz ist

$$s_i(\tau+1) = s_i(\tau) + \sum_k J_{ki}(\tau)\,,$$

$$J_{ik}(\tau+1) = \begin{cases} \begin{array}{ccl} 1 & \text{falls} & 0 < s_k(\tau) - s_i(\tau) < \lambda_1 \\ & \text{oder} & 0 < s_k(\tau) - s_i(\tau) < \lambda_2 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0\,, \\ -1 & \text{falls} & 0 > s_k(\tau) - s_i(\tau) > -\lambda_1 \\ & \text{oder} & 0 > s_k(\tau) - s_i(\tau) > -\lambda_2 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0\,, \\ J_{ik}(\tau) & \text{falls} & s_k(\tau) = s_i(\tau)\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, & \end{array} \end{cases}$$

wobei $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ freie Parameter sind. Die Idee dabei ist, daß die Kanten je nach Wert -1, 1 oder 0 ein elementares Quantum, hier der Einfachheit halber 1, vom Anfangspunkt zum Endpunkt oder umgekehrt transportieren, je nach der durch das Vorzeichen von J_{ik} gegebenen Orientierung, oder aber inaktiv sind. Der weitere Zustand an einer Kante hängt von dem Betrag und dem Vorzeichen der „Potentialdifferenz“ zwischen den angrenzenden Vertizes ab. Bei großen Differenzen werden die Kanten inaktiv, bei kleinen werden sie aktiv. Ihre Orientierung ist so, daß sie Zustandsdifferenzen ausgleichen. Zusätzlich werden die Kantenzustände durch eine Art Hystereseintervall stabilisiert. Aktive Kanten neigen also dazu, aktiv zu bleiben, und inaktive Kanten neigen dazu, inaktiv zu bleiben.

Im Vorfeld dieser Arbeit durchgeführte numerische Simulationen zeigen, daß schon kleine Netzwerke dieses Typs äußerst komplexes Verhalten zeigen. Bei der numerischen Untersuchung des Modells wurde weiterhin deutlich, daß grundlegende konzeptionelle Fragen zur Bewertung des Verhaltens ungeklärt waren. Eine der Hoffnungen ist beispielsweise, eine Entfaltung des Netzwerks von einem hochvernetzten, nicht-strukturierten Anfangszustand, in Idealisierung etwa einem Simplexzustand mit ausschließlich aktiven Kanten, zu einem strukturierten Zustand mit erkennbarer Raumstruktur und einer wohldefinierten Dimension zu beobachten. In der uns bekannten Literatur ist jedoch kein adäquater Begriff für die Dimension eines zellularen Netzwerkes oder eines Graphen enthalten. Deshalb wurden in [Req1] Dimensionsbegriffe für Graphen vorgeschlagen, die in dieser Arbeit in Kapitel 3 zusammen mit ähnlichen Varianten ausführlich untersucht werden.

Bei der Entwicklung interessanter Beispiele wurde zudem rasch klar, daß es sehr schwer ist, geeignete Netzwerkgesetze zu finden, die zu den erwarteten Eigenschaften einer physikalischen Theorie führen. Eine Idee zur Lösung dieses Problems ist die Übertragung bekannter Kontinuumstheorien auf den diskreten Rahmen von zellularen Netzwerken. Da die meisten der heute gebräuchlichen Theorien geometrischer Natur sind, ist es dazu notwendig, die Konzepte der Differentialgeometrie auf zellulare Netzwerke, d. h. auf Graphen, zu übertragen. Es gibt in diesem Bereich schon einen Ansatz von Dimakis und Müller-Hoissen, in dem die nichtkommutative Geometrie im Sinne Connes auf abzählbare Mengen übertragen wird. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt. Weiterhin entwickelte Requardt [Req1] eine direkte Konstruktion differentialgeometrischer Konzepte auf Graphen, die in Abschnitt 4.2 ausgearbeitet ist. Schließlich wird in Abschnitt 4.3 noch eine im Rahmen dieser Arbeit entwickelte dritte Variante erläutert, die sich an die Methoden der numerischen Mathematik und die klassische Differentialgeometrie anlehnt.
In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, wie man mit Hilfe eines solchen Differentialkalküls ein Analogon der klassischen Feldtheorie auf Graphen formulieren kann.

In dieser Arbeit ist im wesentlichen nur von Graphen die Rede. Man muß sich dabei aber stets bewußt sein, daß die Untersuchung dem Verständnis der Struktur zellularer Netzwerke dient und damit die Formulierung einer physikalischen Theorie mit solchen Netzwerken in Zukunft ermöglichen soll. Die allgemeinere Formulierung wurde gewählt, um die entwickelten Konzepte in einem möglichst allgemeinen Rahmen nutzbar zu machen.

Kapitel 2

Begriffe der Graphentheorie

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigten Begriffe aus der Graphentheorie. Dabei werden die Begriffe nur definiert, um Mißverständnisse aufgrund der vielen unterschiedlichen Bezeichnungen und Konventionen, die es in diesem Gebiet leider gibt, zu vermeiden und die Notation zu fixieren. Für eine Einführung in die Graphentheorie sei auf die bekannten Lehrbücher, etwa [Die, Tut, Wag], verwiesen.

Die grundlegenden Strukturen, mit denen wir uns beschäftigen, sind zellulare Netzwerke. Sie sind als geometrische Objekte Graphen, insbesondere gerichtete Digraphen oder entsprechende ungerichtete einfache Graphen. Dieser Aspekt wird uns im folgenden beschäftigen. Man findet in der Literatur verschiedene Begriffsbildungen. Wir verwenden hier die folgende Definition:

Definition 2.1 (Gerichteter Graph) *Ein* gerichteter Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ *ist ein Paar abzählbarer Mengen V und E und Abbildungen $\delta_1, \delta_2 : E \to V$. Die Elemente aus V heißen Vertizes (Knoten, Ecken) und die Elemente aus E Kanten (Bonds, Edges). Die Abbildungen δ_1 und δ_2 werden so interpretiert, daß sie jede Kante auf ihren Anfangs- bzw. Endpunkt abbilden.*

Anschaulich kann man sich die Elemente von V als Punkte in einem Vektorraum, etwa dem $\mathbb{R}^n$, und die Kanten aus E als Wege zwischen den durch δ_1 und δ_2 gegebenen Anfangs- und Endpunkten vorstellen. Wir werden diese Anschauung später durch den Begriff der Einbettung eines Graphen in einen Vektorraum präzisieren. Man bezeichnet eine Kante als *inzident* zu einem Vertex, wenn der Vertex Anfangs- oder Endpunkt der Kante ist. Eine zu einem Vertex inzidente Kante heißt *auslaufend*, wenn sie ihn als Anfangspunkt besitzt. Sie heißt *einlaufend* zu einem Vertex, wenn sie ihn als Endpunkt hat. Eine anderer häufig auftretender Begriff ist der des ungerichteten Graphen.

Definition 2.2 (Ungerichteter Graph) *Ein* ungerichteter Graph *setzt sich aus den gleichen Daten zusammen wie ein gerichteter Graph. Im Unterschied zu* *diesem haben die Kanten keine Richtung, d. h. die Kanten haben nicht Anfangs- und Endpunkte sondern zwei gleichwertige Randpunkte.*

In der vollen Allgemeinheit von Definition 2.1 und 2.2 kommen Graphen hier nicht vor. Wir betrachten immer spezielle Klassen von Graphen. Es gibt dabei viele Eigenschaften, die Graphen weitergehend klassifizieren. Zur Klassifikation der von uns verwendeten Graphen benötigt man folgende Eigenschaften:

Definition 2.3 (Digraph) *Ein* Digraph *ist ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ mit der Eigenschaft, daß E mittels $f : E \to V \times V$, $e \mapsto (\delta_1(e), \delta_2(e))$ bijektiv auf eine Teilmenge von $V \times V$ abgebildet werden kann. Das heißt, in einem Digraphen gibt es zu einem gegebenen Paar von Vertizes höchstens zwei sie verbindende Kanten.*

Eine weitere Klasse sind die einfachen Graphen.

Definition 2.4 (Einfacher Graph) *Unter einem* einfachen Graphen *versteht man einen Graphen, bei dem es höchstens eine Kante zwischen je zwei Vertizes gibt.*

Wir betrachten im folgenden stets nur einfache Graphen und Digraphen, so daß wir die Notation $V = \{n_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ und $E = \{n_{ij} : (i, j) \in J \subset I \times I\}$ mit $\delta_1(n_{ij}) = n_i$ und $\delta_2(n_{ij}) = n_j$ verwenden können. Dabei wurde die etwas kompliziertere Bezeichnung n_i statt nur i gewählt, weil V in Kapitel 4 mit einer algebraischen Struktur versehen wird, die von der algebraischen Struktur der Indexmenge I als Teilmenge von $\mathbb{N}$ abweicht. Weiterhin betrachten wir im folgenden stets nur schleifenfreie Graphen. Das bedeutet, daß der Anfangs- und Endpunkt bzw. die beiden Randpunkte einer Kante stets unterschiedliche Vertizes sein müssen. Anders ausgedrückt gilt stets $(i, i) \notin J$.
Ein dem ungerichteten Graphen sehr ähnlicher, aber nicht identischer Begriff ist der des symmetrischen Digraphen.

Definition 2.5 (Symmetrischer Digraph) *Ein gerichteter Digraph heißt* symmetrischer Digraph*, wenn es zu jeder Kante n_{ij} von n_i nach n_j auch eine Kante n_{ji} von n_j nach n_i gibt.*

Man sieht leicht, daß aus einem symmetrischen Digraphen ein ungerichteter einfacher Graph hervorgeht, wenn man die Elemente n_{ij} und n_{ji} identifiziert. Für die spätere geometrisch-algebraische Behandlung sind symmetrische Digraphen besser geeignet, für die Untersuchungen dimensionaler Eigenschaften in Kapitel 3 die ungerichteten einfachen Graphen. In [Req1] wird dieses konzeptionelle Problem dadurch gelöst, daß man zu einem symmetrischen Digraphen $\mathcal{G} = (V, E)$ die freie additive Gruppe über E bildet und ungerichtete, aber orientierte Kanten $b_{ij} := n_{ij} - n_{ji}$ einführt. So erhält man einen zugehörigen ungerichteten einfachen Graphen. Dann kann man je nach Notwendigkeit mit dem einen oder dem anderen Begriff arbeiten.

Die bisher angegebenen Begriffe beruhen auf globalen Eigenschaften von Graphen. Es gibt jedoch auch Begriffe für die Eigenschaften einzelner Vertizes und Kanten sowie bestimmter Untermengen eines Graphen, die im folgenden wichtig sind. Als erstes definieren wir den Vertexgrad.

Definition 2.6 (Vertexgrad) *Der* einlaufende Grad *eines Vertex n_i in einem gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist die Anzahl der einlaufenden Kanten,* $\deg(n_i) := \mathrm{Card}\{n_{ji} : j \in I, (i,j) \in J\}$. *Analog ist der* auslaufende Grad *die Anzahl der auslaufenden Kanten. In ungerichteten Graphen ist der* Grad schlechthin *die Zahl der zu einem Vertex inzidenten Kanten.*

Der einlaufende und der auslaufende Vertexgrad der Vertizes eines symmetrischen Digraphen sind offensichtlich gleich und ebenfalls identisch mit dem Grad des Vertex in dem zugehörigen ungerichteten einfachen Graphen. Wir sprechen deshalb in diesem Zusammenhang auch einfach nur vom *Grad* eines Vertex und bezeichnen ihn mit $v_i := \deg(n_i)$. Der Begriff des Vertexgrades ermöglicht eine weitere wichtige Klassifikation von Graphen.

Definition 2.7 (Lokal endlicher Graph) *Ein* lokal endlicher Graph *ist ein Graph, in dem der Vertexgrad für jeden Vertex endlich ist.*

Nun kommen wir nochmal auf die Anschauung für Graphen zurück. Wir definieren eine Einbettungsabbildung für Graphen in den $\mathbb{R}^n$, die die Graphen zu leicht verständlichen anschaulichen Objekten macht.

Definition 2.8 (Grapheneinbettung) *Eine* Einbettung eines Graphen *in den $\mathbb{R}^n$ sind injektive Abbildungen $\iota_0 : V \to \mathbb{R}^n$, $\iota_1 : E \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß n_{ij} auf einen Weg $\iota_1(n_{ij}) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit Endpunkten $\iota_1(n_{ij})(0) = \iota_0(n_i)$ und $\iota_1(n_{ij})(1) = \iota_0(n_j)$ abgebildet wird.*

Wir nennen die Einbettung eines Graphen in den $\mathbb{R}^n$ dabei überschneidungsfrei, wenn sich die zu zwei Kanten gehörenden Wege als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ höchstens an ihren Endpunkten schneiden. Zu dem Begriff der Einbettung gibt es einen wichtigen Satz:

Satz 2.9 *Jeder lokal endliche Graph kann überschneidungsfrei in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden. Dabei kann sogar erreicht werden, daß die Bilder aller Kanten unter der Einbettungsabbildung Wege sind, die Geradenstücke beschreiben.*

Beweisskizze. Graphen können als abstrakte eindimensionale simpliziale Komplexe aufgefaßt werden. Für abstrakte n-dimensionale simpliziale Komplexe weiß man aber, daß sie sich als simpliziale Polyeder in den $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten lassen. Den Beweis für diese Aussage findet man etwa in [tDi, S. 201]. Damit folgt die Aussage des Satzes. □

An diesem Resultat sieht man, daß die Dimension eines Einbettungsraumes einen Graphen nur sehr wenig charakterisiert. Man kann höchstens zwischen planaren Graphen, also solchen, die sich in den $\mathbb{R}^2$ überschneidungsfrei einbetten lassen, und nichtplanaren Graphen unterscheiden. In der großen Klasse der nichtplanaren Graphen hat man jedoch durch die Einbettungsdimension keine Unterscheidungsmerkmale mehr.

Bei der Untersuchung von Dimensionsbegriffen für Graphen spielt der Begriff des Weges in einem Graphen eine wichtige Rolle. Dieser Begriff taucht aber auch bei den Differentialkalkülen in Kapitel 4 wieder auf. Leider gibt es gerade für diesen Begriff sehr viele verschiedene Definitionen. In dieser Arbeit wird die folgende Definition verwendet:

Definition 2.10 (Weg) *Ein* Weg γ *in einem Graphen* $\mathcal{G} = (V, E)$ *ist eine Folge von Kanten* $n_{i_k i_k+1}$ *und Vertizes* n_{i_k}, $i_k \in I$, $k \in K \subset \mathbb{N}$, *wobei der Endpunkt einer Kante mit dem Anfangspunkt der nächsten übereinstimmt. Der Weg* γ *hat die Länge* $l(\gamma) := \mathrm{Card}\, K - 1$.

Dies ist genau das, was man sich anschaulich unter einem Weg in einem Graphen vorstellt. Durch eine Einbettung in den $\mathbb{R}^n$ wird ein Weg in einem Graphen zu einem stetigen Weg im $\mathbb{R}^n$.
Mit dem Begriff des Weges in Graphen kann man auch eine natürliche Metrik und einen Umgebungsbegriff einführen.

Definition 2.11 (Metrik) *Der* Abstand d *zwischen zwei Vertizes* n_i *und* n_j *ist durch*

$$d(n_i, n_j) := \min\{l(\gamma) : n_i, n_j \in \gamma\}$$

definiert, wobei das Minimum der leeren Menge gleich Unendlich gesetzt wird. Dies entspricht der Anschauung, daß zwei Vertizes unendlich weit voneinander entfernt sind, wenn es keinen Weg zwischen ihnen gibt.

Der so definierte Abstand erfüllt für symmetrische Digraphen und ungerichtete einfache Graphen alle Axiome einer Metrik im Sinne von metrischen Räumen, nämlich

$$\begin{aligned} &d(n_i, n_j) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_i = n_j, \\ &d(n_i, n_j) = d(n_j, n_i) \quad \text{und} \\ &d(n_i, n_k) \leq d(n_i, n_j) + d(n_j, n_k)\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Metrik erhält man kanonisch den Begriff einer Umgebung mit Radius k um einen Vertex n_i.

Definition 2.12 (Vertex-Umgebung) *Die* k-Vertex-Umgebung *von* $n_i \in V$ *ist* $\mathcal{U}_k(n_i) := \{n_j \in V : d(n_i, n_j) \leq k\}$. *Der* Rand *der* k*-Vertex-Umgebung von* n_i *ist* $\partial\mathcal{U}_k(n_i) := \mathcal{U}_k(n_i) \backslash \mathcal{U}_{k-1}(n_i)$.

Definition 2.13 (Kanten-Umgebung) *Die* k-Kanten-Umgebung *eines Vertex* $n_i \in V$ *ist* $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i) := \{n_{jl} \in E : d(n_j, n_i) \leq k,\ d(n_l, n_i) \leq k\}$. *Der* Rand *der* k*-Kanten-Umgebung von* n_i *ist* $\partial\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i) := \mathcal{U}_k^{(E)}(n_i) \backslash \mathcal{U}_{k-1}^{(E)}(n_i)$.

Wir verwenden im folgenden das Symbol $i \in \mathrm{NN}(j)$, wenn $(j, i) \in J$ gilt. Dabei steht „NN“ für „nächste Nachbarn“. $i \in \mathrm{NN}(j)$ ist gleichbedeutend mit $n_i \in \mathcal{U}_1(n_j)$.

Definition 2.14 (Untergraph) *Ein* Untergraph *in einem Graphen* $\mathcal{G} = (V, E)$ *ist ein Graph* $\mathcal{G}' = (V', E')$ *mit* $V' \subset V$ *und* $E' \subset E$. *Ein Untergraph* $\mathcal{G}'$ *heißt* induzierter Untergraph, *wenn* $E' = \{n_{ij} \in E : n_i, n_j \in V'\}$ *gilt, also* E' *genau alle Kanten enthält, die in* $\mathcal{G}$ *zu den Vertizes aus* V' *inzident sind.*

Die k-Vertex- und k-Kanten-Umgebung eines Vertex in einem ungerichteten einfachen Graphen bilden zusammen einen induzierten Untergraphen. Ebenso bilden die Wege in einem ungerichteten einfachen Graphen induzierte Untergraphen.
Das kartesische Produkt zweier Graphen erklärt man, wie es der Anschauung entspricht, durch das kartesische Produkt der Vertexmengen und eine geeignete Kantenmenge.

Definition 2.15 (Kartesisches Produkt von Graphen) *Seien* $\mathcal{G}^{(1)} = (V^{(1)}, E^{(1)})$ *und* $\mathcal{G}^{(2)} = (V^{(2)}, E^{(2)})$ *zwei Graphen. Dann ist das* kartesische Produkt $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(1)} \times \mathcal{G}^{(2)}$ *als* $\mathcal{G} = (V, E)$ *mit* $V = V^{(1)} \times V^{(2)} = \{n_{(i,j)} : i \in I^{(1)}, j \in I^{(2)}\}$ *und* $E = \{n_{(i,j)(k,l)} : (i = k\ \wedge\ l \in \mathrm{NN}(j)) \vee (k \in \mathrm{NN}(i)\ \wedge\ j = l\}$ *erklärt.*

Anschaulich gibt es für jeden Vertex aus $\mathcal{G}^{(1)}$ eine Kopie von $\mathcal{G}^{(2)}$, und jeder Vertex dieser Kopien ist entsprechend der Vernetzung von $\mathcal{G}^{(1)}$ mit den entsprechenden Vertizes anderer Kopien verbunden. Man kann dabei die Rollen von $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ vertauschen. Schließlich führen wir auch noch den Begriff eines Gittergraphen ein.

Definition 2.16 (Gittergraph) *Ein ungerichteter einfacher Graph* $\mathcal{G}$ *ist ein* n-dimensionaler Gittergraph, *wenn es eine Einbettung von* $\mathcal{G}$ *in den* $\mathbb{R}^n$ *gibt, so daß die Vertizes bijektiv auf die Punkte eines Gitters im* $\mathbb{R}^n$ *und die Kanten bijektiv auf die Menge aller Kanten in diesem Gitter abgebildet werden. Ein symmetrischer Digraph ist ein Gittergraph, wenn der zugehörige ungerichtete einfache Graph einer ist. Man nennt solche Digraphen dann auch* symmetrische Gittergraphen.

In [DMH] tritt zusätzlich der Begriff des gerichteten Gittergraphen auf. Darunter muß man sich einen gerichteten einfachen Graphen vorstellen, der in obigem Sinne als ungerichteter Graph ein Gittergraph ist und dessen Kanten in der Einbettung stets in positive Richtungen im $\mathbb{R}^n$ zeigen. Dabei zeigt eine eingebettete Kante im $\mathbb{R}^n$ in positive Richtung, wenn die Koordinaten des eingebetteten Endpunkts bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ größer gleich denen des eingebetteten Anfangspunkts sind.

Eines der Hauptziele der von uns entwickelten Begriffe ist die von kontinuierlichen Einbettungsräumen unabhängige Formulierung von physikalischen Theorien auf diskreten Räumen. Deshalb haben wir uns auch an dieser Stelle schon viel Mühe gegeben, den Begriff des Gittergraphen möglichst unabhängig von einer konkreten Einbettung zu formulieren. Eine vollständig von einer Einbettung unabhängige Charakterisierung von Gittern erweist sich jedoch als unerwartet schwierig, weshalb es uns leider bisher nicht gelungen ist, den Begriff eines Gittergraphen in einfacher Weise ausschließlich über die intrinsische Struktur von Graphen zu definieren.

Nun sind die wichtigsten Begriffe genannt worden, und wir können im nächsten Kapitel mit diesen Hilfsmitteln Dimensionsbegriffe für Graphen definieren und deren Eigenschaften untersuchen.

Kapitel 3

Dimension von Graphen und Netzwerken

In diesem Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten der Definition von Dimensionsbegriffen für *lokal endliche, ungerichtete einfache Graphen* untersucht. Wie zuvor schon angedeutet, ist die Dimension eines Einbettungsraumes kein geeigneter Begriff. Vor der Bewertung möglicher Dimensionsbegriffe muß man jedoch zunächst Eigenschaften benennen, die man von ihnen erwartet.
Die Dimension eines Graphen sollte höchstens zunehmen, wenn man Vertizes oder Kanten hinzufügt. Auch sollte die Dimension nicht von einer willkürlichen Auswahl bei der Bestimmung abhängen, d. h. der Dimensionsbegriff sollte wohldefiniert sein. Weiterhin erwartet man, daß ein Graph, der als ein n-dimensionales Gitter in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann, die Dimension n hat. Das heißt, man möchte eine konsistente Verallgemeinerung des von dem natürlichen Einbettungsraum für Gittergraphen stammenden Dimensionsbegriffs erreichen. Schließlich sollte ein globaler Dimensionsbegriff, der die Struktur des gesamten Graphen erfaßt, unter in geeignetem Sinne kleinen Veränderungen des Graphen stabil sein. Im folgenden werden einige Kandidaten für Dimensionsbegriffe vorgestellt und ihre Eigenschaften hinsichtlich der genannten Kriterien und ihres Verhältnisses zueinander untersucht. Ein großer Teil der im folgenden geschilderten Resultate ist schon in [NRe] von uns publiziert worden.

3.1 Dimensionsbegriffe auf Graphen

Wir definieren zwei ähnliche, aber - wie sich herausstellen wird - nicht identische Dimensionsbegriffe. Beide Begriffe beruhen auf dem Abzählen gewisser Vertexmengen in dem zu untersuchenden Graphen $\mathcal{G}$. Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} u_k(n_i) &:= \mathrm{Card}(\mathcal{U}_k(n_i)) \quad \text{und} \\ r_k(n_i) &:= \mathrm{Card}(\partial\mathcal{U}_k(n_i)) = \mathrm{Card}(\mathcal{U}_k(n_i)\backslash\mathcal{U}_{k-1}(n_i))\,, \quad \text{sowie} \\ r_0(n_i) &:= 1 \end{aligned}$$

ein und definieren als erstes die Skalierungsdimension.

Definition 3.1 (Skalierungsdimension) *Sei $n_i \in V$ ein beliebiger Vertex eines lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$.*

$$\underline{D}_S(n_i) := \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k}$$

ist die untere *und*

$$\overline{D}_S(n_i) := \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k}$$

die obere Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i. *Wenn beide übereinstimmen, heißt $D_S(n_i) := \underline{D}_S(n_i) = \overline{D}_S(n_i)$ einfach* die Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i *und wenn schließlich $D_S(n_i)$ für alle n_i gleich ist, so heißt $D_S := D_S(n_i)$ schlicht* die Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$.

Während bei der Skalierungsdimension das Auszählen der gesamten Umgebungsgrößen $u_k(n_i)$ eines Vertex n_i ausschlaggebend ist, ist es bei der Konnektivitätsdimension, die wir nun definieren, das Abzählen der Vertizes im Rand der Umgebungen.

Definition 3.2 (Konnektivitätsdimension) *Sei n_i wieder ein beliebiger Vertex eines lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G}$. Ist die Zusammenhangskomponente von n_i unendlich, definieren wir*

$$\underline{D}_C(n_i) := \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1$$

als die untere *und*

$$\overline{D}_C(n_i) := \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1$$

als die obere Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i. *Falls obere und untere Konnektivitätsdimension übereinstimmen, definieren wir durch $D_C(n_i) := \underline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C(n_i)$* die Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i *und, wenn diese auch noch für alle n_i konstant ist, bezeichnen wir $D_C := D_C(n_i)$ einfach als* die Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$.
Ist die Zusammenhangskomponente von n_i endlich, dann definieren wir die Konnektivitätsdimension als $D_C(n_i) = 0$.

Man sieht, daß für endliche Graphen oder endliche Zusammenhangskomponenten von Graphen $r_k(n_i)$ für jedes n_i und ausreichend großes k Null wird, so daß der Logarithmus von $r_k(n_i)$ nicht mehr definiert ist. Deshalb muß man die Konnektivitätsdimension in diesen Fällen gesondert definieren. Für unendliche Zusammenhangskomponenten von n_i ist $r_k(n_i)$ aufgrund der lokalen Endlichkeit der Graphen für alle k nicht Null und das Problem tritt nicht auf.

Beide bisher definierten Dimensionsbegriffe beruhen auf dem Abzählen von *Vertizes* in k-Umgebungen eines Vertex. Man kann aber ebensogut die *Kanten* in einer solchen Umgebung zählen. Dadurch erhält man eine zweite Variante der oben definierten Dimensionsbegriffe. Die resultierenden Begriffe sind nicht zueinander oder zu den bisher definierten Begriffen äquivalent, wie wir später noch zeigen. Wir verwenden hier die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
&u_k^{(E)}(n_i) := \mathrm{Card}(\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)) \quad \text{und} \\
&r_k^{(E)}(n_i) := \mathrm{Card}(\partial\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)) = \mathrm{Card}(\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i) \backslash \mathcal{U}_{k-1}^{(E)}(n_i))\,, \quad \text{sowie} \\
&r_0^{(E)}(n_i) := 0\,.
\end{aligned}$$

Definition 3.3 (Kanten-Skalierungsdimension) *Sei $n_i \in V$ ein beliebiger Vertex eines lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Dann ist*

$$\underline{D}_S^{(E)}(n_i) := \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k^{(E)}(n_i)}{\ln k}$$

die untere und

$$\overline{D}_S^{(E)}(n_i) := \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k^{(E)}(n_i)}{\ln k}$$

die obere Kanten-Skalierungsdimension *von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i. Wenn beide übereinstimmen, heißt $D_S^{(E)}(n_i) := \underline{D}_S^{(E)}(n_i) = \overline{D}_S^{(E)}(n_i)$ einfach* die Kanten-Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i *und wenn schließlich $D_S^{(E)}(n_i)$ für alle n_i gleich ist, so heißt $D_S^{(E)} := D_S^{(E)}(n_i)$ schlicht* die Kanten-Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$*.*

Diese Definition ist abgesehen davon, daß hier Kanten und nicht Vertizes gezählt werden, vollständig analog zu der der Skalierungsdimension. In gleicher Weise definieren wir analog zu der Konnektivitätsdimension die Kanten-Konnektivitätsdimension.

Definition 3.4 (Kanten-Konnektivitätsdimension) *Sei n_i wieder ein beliebiger Vertex eines lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G}$. Ist die Zusammenhangskomponente von n_i unendlich, definieren wir*

$$\underline{D}_C^{(E)}(n_i) := \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k^{(E)}(n_i)}{\ln k} + 1$$

als die untere *und*

$$\overline{D}_C^{(E)}(n_i) := \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k^{(E)}(n_i)}{\ln k} + 1$$

als die obere Kanten-Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i. *Falls obere und untere Kanten-Konnektivitätsdimension übereinstimmen, definieren wir durch* $D_C^{(E)}(n_i) := \underline{D}_C^{(E)}(n_i) = \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$ die Kanten-Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$ ausgehend von n_i *und, wenn diese auch noch für alle* n_i *konstant ist, heißt* $D_C^{(E)} := D_C^{(E)}(n_i)$ *einfach* die Kanten-Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$.
Ist die Zusammenhangskomponente von n_i *endlich, dann setzen wir* $D_C^{(E)}(n_i) = 0$.

Alle vier Begriffe besitzen große Ähnlichkeit zu den Abzähldimensionen der fraktalen Geometrie. Wie bei diesen Begriffen wird ein Maß für Volumina, hier die Kardinalität einer k-Umgebung oder ihres Randes, und ein Längenmaß, hier der Radius der betrachteten Umgebung, in Verhältnis zueinander gesetzt und dann das Verhalten bei Veränderung der Skala untersucht. Als typisches Verhalten eines D-dimensionalen Objektes erwartet man ein Anwachsen des Volumens der k-Umgebung proportional k^D und des Volumens des Randes dieser Umgebung proportional k^{D-1}. Diese Erwartung spiegeln die getroffenen Definitionen wider. Im Gegensatz zu den Begriffen der fraktalen Geometrie wird hier jedoch nicht eine Untersuchung auf immer kleineren Skalen sondern auf immer größeren Skalen durchgeführt. Dies ist notwendig, da Graphen aufgrund ihrer diskreten Struktur eine natürliche untere Schranke für die betrachtete Skala besitzen. Diese Eigenschaft von Graphen spiegelt die Eigenschaft der physikalischen Raumzeit wider, die mit der Planck-Skala eben auch eine kleinste auflösbare Skala besitzt. Die Notwendigkeit der Betrachtung wachsender Skalen ist demnach eine direkte Folge der angenommenen diskreten Struktur der physikalischen Raumzeit. Damit verbunden ist auch die Tatsache, daß auf diese Weise nur globale Dimensionsbegriffe auf Graphen gebildet werden können.

Jetzt werden die Eigenschaften der vier definierten Dimensionsbegriffe und ihr Verhältnis zueinander untersucht. Da der Fall endlicher Zusammenhangskomponenten ohnehin für alle Dimensionsbegriffe Null liefert, wird er im folgenden generell ausgeschlossen. Wir betrachten also nur Graphen, deren Zusammenhangskomponenten unendlich viele Vertizes umfassen. Weiterhin verwenden wir die Sprechweise, daß eine Dimension *existiert*, wenn die obere und untere Dimension *gleich* sind. Sie dürfen dabei durchaus unendlich sein. Als erstes werden die Eigenschaften der Skalierungsdimension bestimmt. Man sieht direkt an der Definition, daß das Hinzufügen von Vertizes und Kanten die Zahlen $u_k(n_i)$ bzw. $u_k^{(E)}(n_i)$ und damit die Skalierungsdimension bzw. die Kanten-Skalierungsdimension höchstens vergrößert.
Weiterhin kann man zeigen, daß die Skalierungsdimension im wesentlichen unabhängig von der Wahl des Vertex ist, von dem aus sie bestimmt wird.

Lemma 3.5 *Seien $n_i, n_j \in V$ zwei beliebige Vertizes in einem lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ mit $d(n_i, n_j) < \infty$. Dann gilt $\underline{D}_S(n_j) = \underline{D}_S(n_i)$ und $\overline{D}_S(n_j) = \overline{D}_S(n_i)$. Die analoge Aussage gilt auch für die untere und obere Kanten-Skalierungsdimension $\underline{D}_S^{(E)}$ und $\overline{D}_S^{(E)}$.*

Beweis. Sei $a := d(n_i, n_j)$ der Abstand der beiden Vertizes. Nach Voraussetzung ist a endlich und man kann auf einem Weg der Länge a von n_i nach n_j gelangen. Deshalb gilt für $k \geq a$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{U}_{k-a}(n_j) \subseteq \mathcal{U}_k(n_i) \subseteq \mathcal{U}_{k+a}(n_j) \qquad (3.1)\\
\Rightarrow\quad & \frac{\ln u_{k-a}(n_j)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_{k+a}(n_j)}{\ln k}\\
\Rightarrow\quad & \frac{\ln u_{k-a}(n_j)}{\ln(k-a) + \ln\frac{k}{k-a}} \leq \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_{k+a}(n_j)}{\ln(k+a) - \ln\frac{k+a}{k}}\\
\Rightarrow\quad & \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_j)}{\ln k + \ln\frac{k+a}{k}} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_j)}{\ln k - \ln\frac{k}{k-a}}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_j)}{\ln k + \ln\frac{k+a}{k}} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_j)}{\ln k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_j)}{\ln k - \ln\frac{k}{k-a}},$$

so daß $\underline{D}_S(n_i) = \underline{D}_S(n_j)$ folgt. Der Beweis für die obere Skalierungsdimension ist identisch. Da die Relation (3.1) ebenso für die Kantenumgebung $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$ und $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_j)$ erfüllt ist, gilt die gleiche Aussage auch für die Kanten-Skalierungsdimension. $\square$

Die Bedingung $d(n_i, n_j) < \infty$ bedeutet, daß n_i und n_j in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathcal{G}$ liegen. Also ist die Skalierungsdimension ausgehend von jedem Vertex einer Zusammenhangskomponente gleich. Betrachtet man zusammenhängende Graphen, so ist die Skalierungsdimension ausgehend von *jedem* Vertex dieselbe.

Als nächstes untersuchen wir, ob die Skalierungsdimension auf Gittergraphen die Dimension des natürlichen Einbettungsraumes zurückliefert. Wir betrachten also einen Gittergraphen $\mathcal{G}$ und seine Einbettung als Bravais-Gitter im $\mathbb{R}^n$. Man braucht nun eine Aussage über das Volumen eines speziellen Gebietes im $\mathbb{R}^n$. Sei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ die Basis des eingebetteten Bravais-Gitters. Dann ist $\omega_V = \sqrt{|\det(a_{ij})|}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, mit $a_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle$ im Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ und x_i den Komponenten bezüglich a_i, die zugehörige Volumenform. Dabei wurden wie üblich der $\mathbb{R}^n$, sein Tangentialraum und sein Kotangentialraum identifiziert. Es gilt die folgende Aussage:

Lemma 3.6 *Das Volumen des durch $\{x = \sum_{i=1}^n x_i a_i \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|a_i\|} \leq k\}$*

gegebenen Gebietes ist

$$V_k = \left(\sqrt{|\det(a_{ij})|} \, \frac{2^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \|a_i\| \right) k^n =: \alpha k^n \,.$$

Im $\mathbb{R}^3$ ist das Gebiet für ein kubisches Gitter mit gleich langen Basisvektoren, $\|a_i\| = a$ für alle i, beispielsweise ein Oktaeder mit Mittelpunkt im Nullpunkt und Kantenlänge $ka\sqrt{2}$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach der Dimension n des Einbettungsraumes durch. Für $n = 1$ gilt

$$V_k = \int\limits_{\frac{|x_1|}{\|a_1\|} \le k} \sqrt{|a_{11}|} \, dx_1 = \sqrt{|\det(a_{11})|} \, \frac{2^1}{1!} \, \|a_1\| \, k^1 \,.$$

Sei also die Behauptung für n richtig, dann erhält man für $n+1$

$$\begin{aligned}
V_k &= \int\limits_{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{|x_i|}{\|a_i\|} \le k} \sqrt{|\det(a_{ij}^{(n+1)})|} \, dx_1 \ldots dx_{n+1} \\
&= \frac{\sqrt{|\det(a_{ij}^{(n+1)})|}}{\sqrt{|\det(a_{ij}^{(n)})|}} \int\limits_{-k\|a_{n+1}\|}^{k\|a_{n+1}\|} \int\limits_{\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|a_i\|} \le k - \frac{|x_{n+1}|}{\|a_{n+1}\|}} \sqrt{|\det(a_{ij}^{(n)})|} \, dx_1 \ldots dx_n \, dx_{n+1} \\
&= \left(\sqrt{|\det(a_{ij}^{(n+1)})|} \, \frac{2^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \|a_i\| \right) \int\limits_{-k\|a_{n+1}\|}^{k\|a_{n+1}\|} \left(k - \frac{|x_{n+1}|}{\|a_{n+1}\|} \right)^n dx_{n+1} \\
&= \left(\sqrt{|\det(a_{ij}^{(n+1)})|} \, \frac{2^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \|a_i\| \right) \left(\left[\frac{\|a_{n+1}\|}{n+1} \left(k - \frac{-x_{n+1}}{\|a_{n+1}\|} \right)^{n+1} \right]_{-k\|a_{n+1}\|}^{0} \right. \\
&\qquad \left. + \left[- \frac{\|a_{n+1}\|}{n+1} \left(k - \frac{x_{n+1}}{\|a_{n+1}\|} \right)^{n+1} \right]_{0}^{k\|a_{n+1}\|} \right) \\
&= \left(\sqrt{|\det(a_{ij}^{(n+1)})|} \, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} \|a_i\| \right) k^{n+1} \,.
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Lemma läßt sich die Skalierungsdimension des Gittergraphen leicht bestimmen. Die Zahl $u_k(n_0)$ der in k Schritten vom Vertex im Nullpunkt, den wir hier n_0 nennen, erreichbaren Vertizes im Gittergraphen läßt sich durch das im $\mathbb{R}^n$ durchmessene Volumen gemäß $V_{k-n}\,\rho \le u_k(n_0) \le V_{k+n}\,\rho$ abschätzen. Dabei bezeichnet ρ die konstante Anzahldichte der eingebetteten Vertizes im $\mathbb{R}^n$. Man schätzt mit den Volumina V_{k-n} und V_{k+n} ab, da in n Schritten mindestens eine gesamte Einheitszelle durchlaufen wird und daher die Abschätzung so großzügig ist, daß eventuelle Randfehler bei der Rechnung mit der Vertexdichte und dem Volumen V_k die Ungleichung nicht stören können. Mit dieser Ungleichung erhält man direkt die Skalierungsdimension des Gittergraphen.

Lemma 3.7 *Sei $\mathcal{G}$ der Gittergraph zu einem n-dimensionalen Bravais-Gitter. Dann existiert die Skalierungsdimension des Gittergraphen und ist von allen Vertizes aus $D_S = n$. Ebenso ergibt auch die Kanten-Skalierungsdimension von jedem Vertex aus $D_S^{(E)} = n$.*

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \rho V_{k-n} \leq u_k(n_0) \leq \rho V_{k+n} \\
\Rightarrow \quad & \alpha\rho\,(k-n)^n \leq u_k(n_0) \leq \alpha\rho\,(k+n)^n \\
\Rightarrow \quad & \frac{\ln \alpha\rho + n\big(\ln k + \ln \frac{k-n}{k}\big)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k} \leq \frac{\ln \alpha\rho + n\big(\ln k + \ln \frac{k+n}{k}\big)}{\ln k} \\
\Rightarrow \quad & D_S(n_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k} = n\,.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 3.5 ist dann D_S ausgehend von allen Vertizes gleich, weil der Gittergraph zusammenhängend ist. Das Ergebnis für die Kanten-Skalierungsdimension erhält man durch Ersetzen der Anzahldichte der eingebetteten Vertizes durch die entsprechende Größe $\rho^{(E)}$ für die eingebetteten Kanten, wobei man zur Vereinfachung davon ausgehen kann, daß alle Kanten bei der Einbettung auf Strecken abgebildet werden. □

Die Skalierungsdimension ist also eine Verallgemeinerung des auf Gittergraphen durch die natürliche Einbettungsdimension gegebenen Dimensionsbegriffs.
Eine weitere erwünschte Eigenschaft eines Dimensionsbegriffs, der ein globales Merkmal des gesamten Graphen sein soll, ist die Stabilität unter in geeignetem Sinne kleinen Veränderungen. Auch hierfür läßt sich ein interessantes Resultat angeben.

Lemma 3.8 *Sei $l \in \mathbb{N}$ und $n_i \in V$ ein beliebiger Vertex in einem lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Das Einfügen von beliebig vielen Kanten zwischen Vertizes $n_j, n_k \in V$ mit $d(n_j, n_k) \leq l$ verändert $\underline{D}_S(n_i)$ und $\overline{D}_S(n_i)$ nicht.*

Beweis. Sei n_i ein beliebiger Vertex in $\mathcal{G}$. Wir bezeichnen den aus $\mathcal{G}$ durch Einfügen von Kanten gebildeten Graphen mit $\mathcal{G}'$ und die Umgebungsgrößen in $\mathcal{G}'$ mit $u'_k(n_i) = \mathrm{Card}(\mathcal{U}'_k(n_i))$. Nach Voraussetzung dürfen nur Kanten zwischen Vertizes mit höchstens Abstand l eingefügt werden. Also darf ein Vertex n_j höchstens mit allen Vertizes in $\mathcal{U}_l(n_j)$ verbunden werden. Selbst wenn man dies für jeden Vertex in $\mathcal{G}$ tut, kann man immer noch nicht mit weniger als $\lfloor \frac{k}{l} \rfloor$ Schritten Vertizes außerhalb von $\mathcal{U}_k(n_i)$ erreichen. Dabei bezeichnet das Symbol $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Also gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i) \subseteq \mathcal{U}'_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i) \subseteq \mathcal{U}_k(n_i) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\ln u_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i)}{\ln \lfloor \frac{k}{l} \rfloor} \leq \frac{\ln u'_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i)}{\ln \lfloor \frac{k}{l} \rfloor} \leq \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln \lfloor \frac{k}{l} \rfloor} . \end{aligned}$$

Nun ist $\lfloor \frac{k}{l} \rfloor \geq \frac{k}{2l}$ für ausreichend große k, so daß man für $k \geq K \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\frac{\ln u_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i)}{\ln \lfloor \frac{k}{l} \rfloor} \leq \frac{\ln u'_{\lfloor \frac{k}{l} \rfloor}(n_i)}{\ln \lfloor \frac{k}{l} \rfloor} \leq \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k - \ln 2l}$$

erhält. Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} & \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u'_k(n_i)}{\ln k} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k - \ln 2l} \\ \Rightarrow \quad & \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u'_k(n_i)}{\ln k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} . \end{aligned}$$

Der Beweis für die obere Skalierungsdimension funktioniert analog. □

Das Einfügen von endlich vielen Kanten zwischen Vertizes mit beliebigem endlichen Abstand ändert offensichtlich auch nichts an dem Grenzwert, so daß man das Lemma noch leicht verallgemeinern kann, indem man nur fordert, daß höchstens endlich viele der neu verbundenen Vertizes einen Abstand größer als eine feste Zahl $l \in \mathbb{N}$ haben.

Für die Kanten-Skalierungsdimension ist dieser Beweis zunächst nicht richtig, da man die neu zugefügten Kanten selbst bei der Bestimmung der Skalierungsdimension nicht berücksichtigen muß, bei der Bestimmung der Kanten-Skalierungsdimension hingegen schon. Später wird sich zeigen, daß die Stabilitätsaussage unter der Annahme eines gleichmäßig beschränkten Vertexgrades auch für die Kanten-Skalierungsdimension gilt.

Man muß an dieser Stelle betonen, daß die Einschränkungen an die Modifikationen eines Graphen, die die Skalierungsdimension invariant lassen, recht schwach sind. Es gibt also eine große Klasse von Veränderungen eines Graphen, die die Skalierungsdimension nicht modifizieren. Formuliert man es umgekehrt, so bedeutet dies, daß es sehr schwer ist, die Skalierungsdimension eines Graphen durch Einfügen von Kanten zu verändern, insbesondere deshalb, weil das Einfügen von Kanten zwischen Vertizes mit unbegrenzt wachsendem Abstand zunächst sehr unanschaulich ist. Ein typisches Beispiel für die Deformierung eines Graphen in einen Graphen mit größerer Skalierungsdimension durch Einfügen von Kanten ist die in Abbildung 3.1 dargestellte Überführung einer eindimensionalen Kette in ein zweidimensionales Gitter. Man sieht an der suggestiven Numerierung der

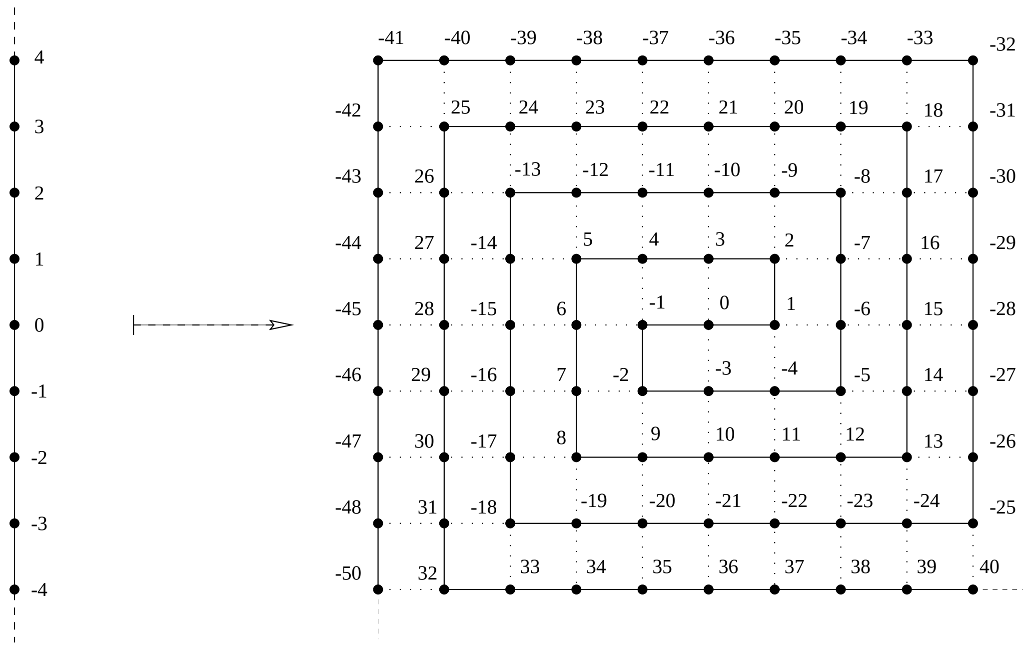


Abbildung 3.1: Deformation einer eindimensionalen Kette zu einem zweidimensionalen Gitter durch Einfügen der gepunktet dargestellten Kanten.

Vertizes sehr deutlich, daß der vorherige Abstand der neu verbundenen Vertizes unbeschränkt wächst, wenn man die Konstruktion weiter nach außen fortsetzt.

Ein eher technisches Lemma liefert eine effiziente Methode, die Skalierungsdimension von Graphen zu berechnen. Es geht darum, daß unter gewissen Voraussetzungen die Untersuchung einer Teilfolge von $u_k(n_i)$ bzw. $u_k^{(E)}(n_i)$ schon ausreicht, um auf das Verhalten der gesamten Folge zu schließen.

Lemma 3.9 *Sei $n_i \in V$ ein beliebiger Vertex eines lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G}$ und sei $(u_{k_s}(n_i))_{s\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Folge $(u_k(n_i))_{k\in\mathbb{N}}$. Weiterhin sei die monoton wachsende Folge $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$ so gewählt, daß eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{k_s}{k_{s+1}} \geq c$ für alle $s \geq \sigma \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt*

$$\underline{D}_S(n_i) = \liminf_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k_s} \quad \textit{und} \quad \overline{D}_S(n_i) = \limsup_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k_s}\,.$$

Die Aussage gilt analog für die untere und obere Kanten-Skalierungsdimension.

Beweis. Sei $k\in\mathbb{N}$, $k \geq k_\sigma$ beliebig. Dann gibt es ein $s\in\mathbb{N}$, $s \geq \sigma$ mit $k_s \leq k \leq k_{s+1}$. Da die Folge $(u_k(n_i))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} & u_{k_s}(n_i) \leq u_k(n_i) \leq u_{k_{s+1}}(n_i) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \leq \frac{\ln u_{k_{s+1}}(n_i)}{\ln k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k_s + \ln \frac{k}{k_s}} \le \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \le \frac{\ln u_{k_{s+1}}(n_i)}{\ln(k_{s+1}) + \ln \frac{k}{k_{s+1}}} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k_s + \ln \frac{1}{c}} \le \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \le \frac{\ln u_{k_{s+1}}(n_i)}{\ln(k_{s+1}) + \ln c} \\
&\Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} = \liminf_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_i)}{\ln k_s}.
\end{aligned}$$

Wieder ist der Beweis für den Limes superior identisch. Der Beweis ist auch für die Kanten-Skalierungsdimension richtig, da die Folge $u_k^{(E)}(n_i)$ ebenfalls monoton wachsend ist. □

Dieses Resultat ist im Zusammenhang mit der Berechnung fraktaler Dimensionen, etwa der Kästchenzahldimension, wohlbekannt. Wir werden dieses Lemma später bei der Berechnung von Beispielen häufig verwenden.
Damit sind die wesentlichen Eigenschaften der Skalierungsdimensionen bestimmt. Sie erfüllen alle an einen globalen Dimensionsbegriff geknüpften Erwartungen insbesondere die Unabhängigkeit vom Ausgangspunkt der Bestimmung und die Stabilität unter einer großen Klasse von Störungen.

Die Konnektivitätsdimensionen besitzen weniger der geforderten Eigenschaften als die Skalierungsdimensionen. Zunächst sieht man zwar, daß auch die untere und obere Konnektivitätsdimension und die untere und obere Kanten-Konnektivitätsdimension unter Einfügen von Vertizes (und maximal je einer Kante zur Anbindung an den Graphen) höchstens wachsen können, da $r_k(n_i)$ und $r_k^{(E)}(n_i)$ durch diese Einfügungen für alle k entweder vergrößert werden oder gleich bleiben. Aber schon beim Einfügen beliebiger zusätzlicher Kanten gilt diese Aussage nicht mehr, da Vertizes, die durch die neuen Kanten früher erreicht werden, bei den späteren Umgebungsrändern fehlen. Also können r_k und $r_k^{(E)}$ bei der Einfügung von Kanten für einige k auch kleiner werden. In Beispiel 3.11 wird gezeigt, daß man durch Einfügen von nur zwei Kanten in den dort konstruierten Graphen die von einem gewissen Vertex aus bestimmte untere Konnektivitätsdimension und untere Kanten-Konnektivitätsdimension *verringern* kann.
Als nächstes untersuchen wir die Übereinstimmung mit der natürlichen Einbettungsdimension bei Gittergraphen.

Lemma 3.10 *Für Gittergraphen, die zu einem n-dimensionalen Bravais-Gitter im $\mathbb{R}^n$ gehören, existiert die Konnektivitätsdimension $D_C = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1$ für jedes n_i und ist gleich n. Dasselbe gilt für die Kanten-Konnektivitätsdimension.*

Beweis. Da Bravais-Gitter translationsinvariant unter Verschiebung entlang ihrer Basisvektoren sind, kann jeder Vertex durch Verschiebung des Gitters auf den Nullpunkt abgebildet werden, ohne daß sich dabei die Gitterstruktur verändert. Also ist es ausreichend, die Behauptung für den Nullpunkt, den wir als Vertex im Gittergraphen mit n_0 bezeichnen, zu zeigen. Es existieren Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}$, so daß die folgenden Abschätzungen für alle $k \in \mathbb{N}$ richtig sind.

$$\begin{aligned}(V_{k+c} - V_k)\,\rho \;\geq\; u_{k+1}(n_0) - u_k(n_0) \;=\; r_{k+1}(n_0)\\ (V_{k+c'} - V_k)\,\rho \leq u_{k+1}(n_0) - u_k(n_0) = r_{k+1}(n_0)\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \rho\,(V_{k+c'} - V_k) \;\leq\; r_{k+1}(n_0) \;\leq\; \rho\,(V_{k+c} - V_k)\\
\Rightarrow\quad & \alpha\rho\left((k+c')^n - k^n\right) \;\leq\; r_{k+1}(n_0) \;\leq\; \alpha\rho\left((k+c)^n - k^n\right)\\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha\rho + \ln\left(nc'k^{n-1} + \mathcal{O}(k^{n-2})\right) \leq r_{k+1}(n_0)\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \leq \ln\alpha\rho + \ln\left(nck^{n-1} + \mathcal{O}(k^{n-2})\right)\\
\Rightarrow\quad & \ln(\alpha\rho) + \ln(nc') + (n-1)\ln\left(k + \mathcal{O}(\tfrac{1}{k})\right) \;\leq\; \ln r_{k+1}(n_0)\\
& \qquad\qquad \leq\; \ln(\alpha\rho) + \ln(nc) + (n-1)\ln\left(k + \mathcal{O}(\tfrac{1}{k})\right)\\
\Rightarrow\quad & \lim_{k\to\infty} \frac{\ln r_{k+1}(n_0)}{\ln(k+1)} = n-1\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Für die Kanten folgt die gleiche Aussage, wenn man statt ρ die Kantenanzahldichte $\rho^{(E)}$ verwendet. □

Die Konnektivitätsdimension ist also auch eine konsistente Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs von Gittergraphen auf allgemeine lokal endliche, ungerichtete einfache Graphen. Die anderen Eigenschaften der Skalierungsdimension hat die Konnektivitätsdimension jedoch nicht. An einem Beispiel kann man sofort sehen, daß die Konnektivitätsdimension innerhalb einer Zusammenhangskomponente von dem Ausgangsvertex der Folgenbildung abhängen kann.

Beispiel 3.11 Wir konstruieren einen Klasse von Graphen, die von verschiedenen Vertizes aus unterschiedliche untere Konnektivitätsdimension besitzen. Einer dieser Graphen ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Graphen teilen sich von n_0 aus in einen oberen und einen unteren Strang. Sie werden durch die beiden Parameter $c \in \mathbb{N}$, c gerade, und $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, festgelegt. Für den Graphen in Abbildung 3.2 ist $c = 4$ und $m = \frac{1}{2}$. Von dem Vertex n_1 und dem Vertex n_2 aus folgen in gleichmäßig wachsendem Abstand $2tc + \frac{c}{2}$ zu dem Vertex n_0 die folgenden beiden Konstruktionselemente periodisch aufeinander:

(i) ein vollständiger Baumgraph der Tiefe c und

(ii) die Vertizes eines umgedreht angeordneten vollständigen Baumgraphen, aber nur minimal vernetzt.

Mit wachsendem Abstand k von n_1 haben die Baumgraphen wachsende Wertigkeit, d. h. die Anzahl der im Baumgraphen auf einen Vertex folgenden Vertizes wächst mit wachsendem Abstand des Baumgraphen zu n_1. Dabei gibt der Parameter m die Geschwindigkeit des Anstiegs an. $m = \frac{1}{2}$ in dem abgebildeten

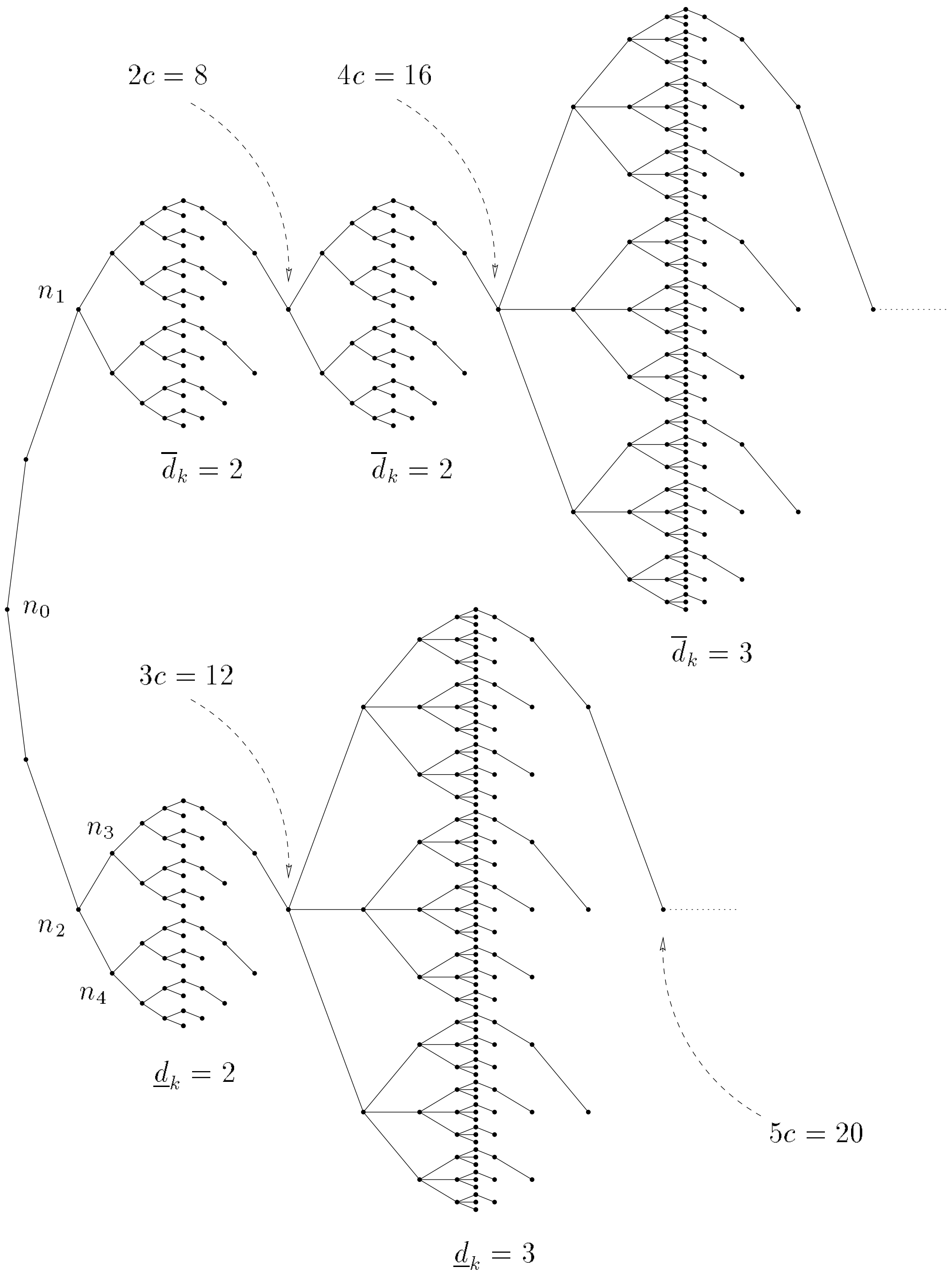


Abbildung 3.2: Beispiel eines Graphen, in dem die untere Konnektivitätsdimension von n_0 und von n_1 aus unterschiedlich sind. Die gestrichelten Pfeile bezeichnen gewisse Abstände von n_1.

Graphen bedeutet etwa, daß die Wertigkeit nach je zwei Baumgraphen ansteigt. Konkret ist oben die Wertigkeit der Baumgraphen durch $\overline{d}_k := \lfloor m \cdot \frac{k}{2c} + 2 \rfloor$ und unten durch $\underline{d}_k := \lfloor m \cdot (\frac{k-c}{2c} + 1) + 2 \rfloor$ gegeben.
Untersucht man die Folge $r_k(n_1)$, so sieht man, daß für hinreichend große k, d.h. nach einem gewissen abweichenden Anfangsverhalten, die folgende Abschätzung gilt:

$$r_k(n_1) \geq 2(\min\{\underline{d}_k, \overline{d}_k\})^{c/2} .$$

Um dies einzusehen, muß man eine Fallunterscheidung machen. Für $2tc \leq k \leq (2t+1)c$, $t \in \mathbb{N}$ beliebig, sind $\overline{d}_k$ und $\underline{d}_k$ konstant und das Minimum aller auftretenden $r_k(n_1)$ ist durch $\min_{0 \leq j \leq c}(\overline{d}_k^j + \underline{d}_k^{c-j}) \geq \min_{0 \leq j \leq c}(d_k^j + d_k^{c-j})$ mit $d_k := \min\{\underline{d}_k, \overline{d}_k\}$ gegeben. Denn $\overline{d}_k^j$ ist die Anzahl der jeweils im Baumgraphen des oberen Stranges hinzukommenden Vertizes und $\underline{d}_k^{c-j}$ die Anzahl der gleichzeitig im umgedrehten Baumgraphen des unteren Stranges hinzukommenden Vertizes. Das Minimum wird für

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dj}\left(d_k^j + d_k^{c-j}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & (\ln d_k) e^{j \ln d_k} - (\ln d_k) e^{(c-j)\ln d_k} = 0 \\
\Rightarrow \quad & j = c - j \quad \Rightarrow \quad j = \frac{c}{2}
\end{aligned}$$

angenommen, da $\frac{d^2}{dj^2}\left(d_k^j + d_k^{c-j}\right) > 0$ für alle $d_k > 1$ gilt. Deshalb kann man für $2tc \leq k \leq (2t+1)c$ den Wert für $r_k(n_1)$ durch $r_k(n_1) \geq 2d_k^{c/2}$ nach unten abschätzen. Analog ergibt sich für $(2t+1)c \leq k \leq 2(t+1)c$, $t \in \mathbb{N}$, die gleiche Abschätzung $r_k(n_1) \geq 2d_k^{c/2}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_1)}{\ln k} & \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln\left(2(\min\{\underline{d}_k, \overline{d}_k\})^{c/2}\right)}{\ln k} \\
& = \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln\left(2\left(\min\{\lfloor m \cdot (\frac{k-c}{2c}+1)+2\rfloor, \lfloor m \cdot \frac{k}{2c}+2\rfloor\}\right)^{c/2}\right)}{\ln k} \\
& \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln 2 + \frac{c}{2}(\ln C + \ln k)}{\ln k} \; = \; \frac{c}{2} ,
\end{aligned}$$

wobei C eine Konstante ist, die sich aus m und c zusammensetzt.
Andererseits hat man von n_0 aus

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k} = 0 ,$$

da $r_{2tc+c/2} = 2$ für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt. Somit ist die untere Konnektivitätsdimension von n_0 und n_1 ausgehend unterschiedlich.
Das Beispiel ist so konstruiert, daß $r_k(n_0) = r_k^{(E)}(n_0)$ und $r_k(n_1) = r_k^{(E)}(n_1)$ für

$k > 0$ gilt. Also überträgt sich das Ergebnis direkt auf die Kanten-Konnektivitätsdimension.
Man sieht an diesem Beispiel auch, daß die Konnektivitätsdimension im allgemeinen nicht stabil und auch nicht notwendig wachsend unter dem Einfügen von Kanten ist. Fügt man in dem Beispiel je eine Kante zwischen n_1 und n_3 und zwischen n_1 und n_4 ein, so gilt für $k > \frac{c}{2}$ die Gleichung $r_k(n_0) = r_k(n_1)$ und die untere Konnektivitätsdimension ist von beiden Vertizes aus $D_C(n_0) = D_C(n_1) = 1$. Also hat das Einfügen von nur zwei Kanten die untere Konnektivitätsdimension ausgehend von n_1 *verringert.* Wieder gilt dasselbe für die Kanten-Konnektivitätsdimension. □

Nachdem die Eigenschaften der einzelnen Dimensionsbegriffe untersucht wurden, wenden wir uns nun den Beziehungen zwischen den einzelnen Begriffen zu. Zuerst untersuchen wir das Verhältnis zwischen Skalierungs- und Konnektivitätsdimension. Es stellt sich heraus, daß die Existenz der Konnektivitätsdimension die Existenz der Skalierungsdimension impliziert.

Lemma 3.12 *Sei $n_i \in V$ ein beliebiger Vertex in einem lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G}$. Falls der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1 = D_C(n_i)$ mit $D_C(n_i) > 1$ existiert, hat $\mathcal{G}$ die Skalierungsdimension $D_S(n_i) = D_C(n_i)$ ausgehend von n_i. Die analoge Aussage gilt für $D_C^{(E)}(n_i)$ und $D_S^{(E)}(n_i)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1 = D_C(n_i) =: D > 1$. Man muß zeigen, daß der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k}$ ebenfalls existiert und gleich D ist. Sei $\epsilon > 0$ so klein, daß $D-1-\epsilon > 0$ gilt. Da $\frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k}$ gegen $D-1$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq N$

$$\begin{aligned} & -\epsilon \;<\; \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} - D + 1 \;<\; \epsilon \\ \Rightarrow \;\; & (D-1-\epsilon)\ln k \;<\; \ln r_k(n_i) \;<\; (D-1+\epsilon)\ln k \\ \Rightarrow \;\; & k^{D-1-\epsilon} \;<\; r_k(n_i) \;<\; k^{D-1+\epsilon} \end{aligned}$$

gilt. Nach Definition von $r_k(n_i)$ und $u_k(n_i)$ ist

$$u_k(n_i) \;=\; \sum_{l=0}^{k} r_l(n_i)\,.$$

Daher folgt $$K(N) + \sum_{l=N+1}^{k} l^{D-1-\epsilon} \;\leq\; u_k(n_i) \;\leq\; K(N) + \sum_{l=N+1}^{k} l^{D-1+\epsilon}$$

mit $K(N) = \sum_{l=0}^{N} r_l(n_i)$. Die Summen der linken und rechten Seite kann man durch Integrale abschätzen.

$$\sum_{l=N+1}^{k} l^{D-1-\epsilon} \geq \int_N^k x^{D-1-\epsilon} dx = \frac{x^{D-\epsilon}}{D-\epsilon}\Big|_N^k$$
$$\sum_{l=N+1}^{k} l^{D-1+\epsilon} \leq \int_{N+1}^{k+1} x^{D-1+\epsilon} dx = \frac{x^{D+\epsilon}}{D+\epsilon}\Big|_{N+1}^{k+1}$$

Mit diesen Abschätzungen erhält man

$$\begin{aligned}
& \ln\Big(K(N) + \frac{k^{D-\epsilon} - N^{D-\epsilon}}{D-\epsilon}\Big) \leq \ln u_k(n_i) \\
& \qquad\qquad \leq \ln\Big(K(N) + \frac{(k+1)^{D+\epsilon} - (N+1)^{D+\epsilon}}{D+\epsilon}\Big) \\
\Rightarrow \quad & \ln(k^{D-\epsilon}) + \ln\Big(\frac{K(N)}{k^{D-\epsilon}} + \frac{1}{D-\epsilon}\Big(1 - \frac{N^{D-\epsilon}}{k^{D-\epsilon}}\Big)\Big) \leq \ln u_k(n_i) \qquad (3.2) \\
& \leq \ln\big((k+1)^{D+\epsilon}\big) + \ln\Big(\frac{K(N)}{(k+1)^{D+\epsilon}} + \frac{1}{D+\epsilon}\Big(1 - \frac{(N+1)^{D+\epsilon}}{(k+1)^{D+\epsilon}}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Das Argument des zweiten Logarithmus auf der linken Seite konvergiert für $k \to \infty$ gegen $\frac{1}{D-\epsilon} > 0$ und das Argument des zweiten Logarithmus auf der rechten Seite gegen $\frac{1}{D+\epsilon} > 0$. Weiterhin ist $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = 1$. Daher gibt es eine Zahl $N' \in \mathbb{N}$, $N' \geq N$, so daß für alle $k \geq N'$

$$D - \epsilon + \frac{\ln\Big(\frac{K(N)}{k^{D-\epsilon}} + \frac{1}{D-\epsilon}\big(1 - \frac{N^{D-\epsilon}}{k^{D-\epsilon}}\big)\Big)}{\ln k} \geq D - 2\epsilon \quad \text{und}$$
$$(D+\epsilon)\frac{\ln(k+1)}{\ln k} + \frac{\ln\Big(\frac{K(N)}{(k+1)^{D+\epsilon}} + \frac{1}{D+\epsilon}\big(1 - \frac{(N+1)^{D+\epsilon}}{(k+1)^{D+\epsilon}}\big)\Big)}{\ln(k)} \leq D + 2\epsilon$$

gilt. Mit diesen Ungleichungen und Ungleichung (3.2) folgt für alle $k \geq N'$

$$\left|\frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} - D\right| \leq 2\epsilon\,.$$

Also konvergiert $\frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k}$ für $k \to \infty$ gegen D. Es wurde nicht verwendet, daß in den Umgebungen Vertizes gezählt werden. Demnach funktioniert der Beweis für die Kanten-Versionen der beiden Dimensionsbegriffe analog. □

Aus Lemma 3.12 folgt, daß unter zusätzlichen Annahmen auch die Konnektivitätsdimension unabhängig vom Ausgangspunkt der Dimensionsbestimmung ist.

Korollar 3.13 *Sei $\mathcal{G}$ ein lokal endlicher, ungerichteter einfacher Graph. Es gelte $\underline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C(n_i) = D_C(n_i)$ für alle n_i in $\mathcal{G}$. Dann gilt $D_C(n_i) = D_C(n_j)$ für alle $n_i, n_j \in V$ mit $d(n_i, n_j) < \infty$. Die analoge Aussage gilt auch für die Kanten-Konnektivitätsdimension.*

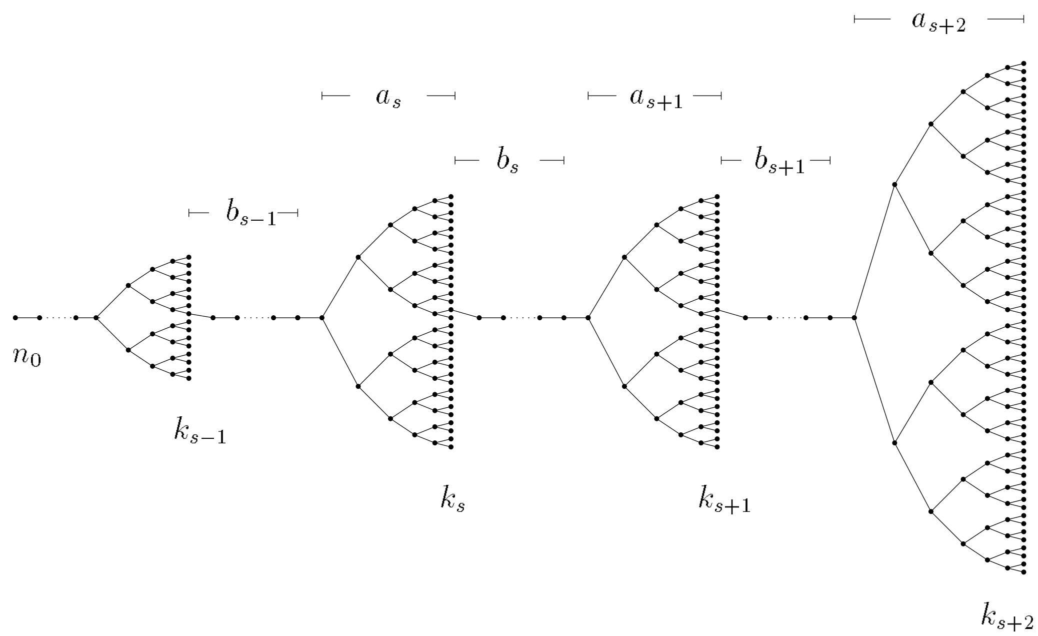


Abbildung 3.3: Beispiel eines Graphen, in dem die Skalierungsdimension existiert, die obere und untere Konnektivitätsdimension jedoch voneinander abweichen.

Beweis. Da nach Voraussetzung $D_C(n_i)$ und $D_C(n_j)$ für alle n_i, n_j existieren, sind nach Lemma 3.12 die Gleichungen $D_S(n_i) = D_C(n_i)$ und $D_S(n_j) = D_C(n_j)$ erfüllt. Nach Lemma 3.5 gilt $D_S(n_i) = D_S(n_j)$ für alle n_i, n_j, die endlichen Abstand zueinander haben. Daher folgt für solche n_i, n_j direkt $D_C(n_i) = D_S(n_i) = D_S(n_j) = D_C(n_j)$. Das gleiche Argument gilt für die Kanten-Konnektivitätsdimension. □

Ist ein Graph nicht zu pathologisch, so liefert also auch die Konnektivitätsdimension einen vernünftigen Begriff hinsichtlich der Unabhängigkeit vom Ausgangspunkt der Dimensionsbestimmung. Die Stabilität unter Einfügen von Kanten läßt sich hingegen nicht auf diese Weise herbeiführen.
Die Umkehrung von Lemma 3.12 gilt nicht, was wir mit folgendem Beispiel zeigen:

Beispiel 3.14 Wir konstruieren einen ungerichteten einfachen Graphen $\mathcal{G}$ mit gleichmäßig durch $d \geq 3$ beschränktem Vertexgrad, der die Skalierungsdimension $D_S = D > 1$ hat, dessen Konnektivitätsdimension aber nicht existiert. Die obere Konnektivitätsdimension des Beispielgraph ist dabei $D + 1$ und die untere 1. Wir konstruieren den Graphen, wie in Abbildung 3.3 angedeutet, als eine stückweise einfache Kette und einen stückweise vollständigen Baumgraphen. In der Abbildung ist $d = 3$. Der Clou des Beispiels ist es, $r_k(n_0)$ so stark in Abhängigkeit von k oszillieren zu lassen, daß keine Konvergenz von $\frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k}$ möglich ist, die Folge $\frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k}$ aber dennoch gegen D konvergiert. Wir wählen Zahlen $k_s \in \mathbb{N}$, so daß $k_{s+1} = ck_s$ mit $c > d^{1/D}$ gilt. Diese Zahlen legen die Stellen fest, an denen die Baumgraphen abbrechen und in die einfache Kette übergehen. Durch diese Wahl wird später die Anwendung von Lemma 3.9 zur Berechnung der Skalierungsdimension möglich. Der in der Abbildung ganz links eingezeichnete Vertex sei mit n_0 bezeichnet. Von diesem Vertex aus werden wir die einzelnen Umgebungsfolgen auswerten, und alle angegebenen Abstände beziehen sich auf diesen Vertex. Die Konstruktion ist wie folgt festgelegt. Vom Vertex mit Abstand k_s bis zum Vertex mit Abstand $k_s + b_s$ ist der Graph eine einfache Kette von b_s Vertizes. Vom Vertex mit Abstand $k_s + b_s + 1$ bis zum Vertex mit Abstand k_{s+1} ist der Graph ein vollständiger (d-1)-wertiger Baumgraph. Dabei ist b_s durch $b_s := \max\{b \in \{0, \ldots, k_{s+1} - k_s\} : u_{k_{s+1}}(n_0) \geq (k_{s+1})^D\}$ festgelegt. Wir beginnen also die Baumgraphen so spät wie möglich, ohne unser Ziel von $u_{k_{s+1}}(n_0) \geq (k_{s+1})^D$ Vertizes in der k_{s+1}-Umgebung zu verfehlen, das die Skalierungsdimension D erlaubt. In den ersten Schritten der Konstruktion könnte $k_{s+1} - k_s$ nicht groß genug sein, um den notwendigen Baumgraphen aufzunehmen, für große s sieht man aber, daß die dafür notwendige Bedingung

$$(d-1)^{k_{s+1}-k_s} \geq (k_{s+1})^D - (k_s)^D \quad \Leftrightarrow \quad (d-1)^{(c-1)k_s} \geq (c^D - 1)k_s^D$$

mit Sicherheit für alle $k_s \geq N$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, weil die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz wächst. In dem Teil, in dem die angegebene Konstruktion noch nicht funktioniert, sei der Graph in irgendeiner zusammenhängenden Form gegeben, so daß $u_k(n_0) = \lfloor k^D \rfloor$ gilt.
Nun können wir die Skalierungsdimension des derart konstruierten Graphen berechnen. Wir wissen, daß für alle $k_s \geq N$ die Gleichung

$$\frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} = \frac{\ln(k_s^D + \Delta_s)}{\ln k_s}$$

gilt, wobei Δ_s zunächst einfach die Abweichung $u_{k_s}(n_0) - k_s^D$ von der für die Skalierungsdimension D optimalen Folge $(k_s^D)_{s\in\mathbb{N}}$ ist, die man durch die Verwendung *vollständiger* Baumgraphen erhält. Diesen Fehler kann man durch $\Delta_s \leq r_{k_s}(n_0)$ abschätzen, da der Graph so konstruiert ist, daß k_s die erste Stelle ist, an der $u_{k_s}(n_0)$ größer als k_s^D wird. Damit folgt

$$\begin{aligned}\Delta_s \;&\leq\; r_{k_s}(n_0) \;\leq\; (d-1)r_{k_s-1}(n_0) \\ &\leq\; (d-1)u_{k_s-1}(n_0) \;\leq\; (d-1)k_s^D\,.\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung erhält man

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(k_s^D)}{\ln k_s} \leq \frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} \leq \frac{\ln(dk_s^D)}{\ln k_s} \\ \Rightarrow \quad &\lim_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} = D\,.\end{aligned}$$

Die Verwendung von Lemma 3.9 ergibt sofort

$$D_S(n_0) = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} = D\,.$$

Schließlich folgt nach Lemma 3.5, daß der Graph von jedem Vertex aus die Skalierungsdimension D hat.
Nun müssen wir andererseits die Folge $\frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k}$ und deren Limes superior und Limes inferior untersuchen. Die Bestimmung des Limes inferior ist trivial, da $r_{k_s+1}(n_0) = 1$ gilt, woraus sofort $\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k} = 0$ folgt. Die Berechnung des Limes superior macht etwas mehr Mühe. Wir wissen, daß

$$u_{k_{s+1}}(n_0) - u_{k_s}(n_0) = b_s + \sum_{j=0}^{a_s}(d-1)^j = b_s + \frac{(d-1)^{a_s+1}-1}{d-2}$$

mit $a_s = k_{s+1} - (k_s + b_s)$ gilt. Andererseits ist

$$u_{k_{s+1}}(n_0) - u_{k_s}(n_0) = (k_{s+1})^D + \Delta_{s+1} - (k_s^D + \Delta_s)\,.$$

Also gilt

$$(k_{s+1})^D + \Delta_{s+1} - (k_s^D + \Delta_s) - b_s = \frac{(d-1)^{a_s+1}-1}{d-2}\,.$$

Wenn man $\Delta_{s+1} \geq 0$, $\Delta_s \leq (d-1)k_s^D$ und $b_s \leq k_{s+1} - k_s$ verwendet, folgt

$$\begin{aligned}
& (k_{s+1})^D - k_s^D - (d-1)k_s^D - k_{s+1} + k_s \;\leq\; \frac{(d-1)^{a_s+1}-1}{d-2} \\
\Rightarrow\quad & (k_{s+1})^D - \tfrac{d}{c^D}k_{s+1}^D - k_{s+1} \;\leq\; 2(d-1)^{a_s} \\
\Rightarrow\quad & (k_{s+1})^D \tfrac{1}{2}\big(1 - \tfrac{d}{c^D} - (k_{s+1})^{1-D}\big) \;\leq\; (d-1)^{a_s} = r_{k_{s+1}}(n_0)\,.
\end{aligned}$$

Für ausreichend große k_{s+1} ist $1 - \frac{d}{c^D} - (k_{s+1})^{1-D} > 0$ und es folgt

$$\begin{aligned}
& D + \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\big(1 - \frac{d}{c^D} - (k_{s+1})^{1-D}\big)\right)}{\ln k_{s+1}} \;\leq\; \frac{\ln r_{k_{s+1}}(n_0)}{\ln k_{s+1}} \\
\Rightarrow\quad & \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k} \;\geq\; D\,.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt aber immer

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln r_k(n_0)}{\ln k} \;\leq\; \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k} \\
\Rightarrow\quad & \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_o)}{\ln k} \;\leq\; D\,.
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man also $\overline{D}_C(n_0) = D+1$. Das Beispiel zeigt, daß die Existenz und der Wert der Skalierungsdimension fast keine Informationen über das Verhalten der $r_k(n_i)$ für einen Vertex n_i liefert. Das einzige, was man stets weiß, ist natürlich, daß $r_k(n_i) \le u_k(n_i)$ und damit $\overline{D}_C(n_i) \le \overline{D}_S(n_i)+1$ gilt. Für $\underline{D}_C(n_i)$ kann man sogar die etwas schärfere Abschätzung $\underline{D}_C(n_i) \le \underline{D}_S(n_i)$ angeben, da bei gegebener Folge $u_k(n_i)$ die untere Konnektivitätsdimension $\underline{D}_C(n_i)$ gerade dann maximal wird, wenn sie gleich $\overline{D}_C(n_i)$ ist. Dann gilt aber $\underline{D}_C(n_i) = \underline{D}_S(n_i)$. Die Konstruktion ist so angelegt, daß $u_k(n_0) = u_k^{(E)}(n_0)+1$ und $r_k(n_0) = r_k^{(E)}(n_0)$ für $k > 0$ gilt. Damit übertragen sich die Aussagen direkt auf das Verhältnis zwischen Konnektivitäts- und Kanten-Konnektivitätsdimension.
Das Beispiel zeigt auch, daß Lemma 3.9 für die Konnektivitätsdimension und die Kanten-Konnektivitätsdimension nicht richtig ist. Nimmt man beispielsweise die Teilfolge $(r_{k_s}(n_0))_{s\in\mathbb{N}}$, so erhält man eine untere Konnektivitätsdimension von $\underline{D}_C(n_0) = D+1$, nimmt man jedoch $(r_{k_s+1}(n_0))_{s\in\mathbb{N}}$, so erhält man wie gesehen $\underline{D}_C(n_0) = 1$. Die Betrachtung von Teilfolgen der Bestimmungsfolge für die Konnektivitäts- oder Kanten-Konnektivitätsdimension reicht also nicht aus und führt zu falschen Werten. □

Nach dem bisher Gesagten könnte der Eindruck entstehen, daß die auf dem Zählen von Kanten basierenden Begriffe im wesentlichen identisch mit den auf dem Zählen von Vertizes basierenden seien. Dies ist aber nicht richtig. Zwar sind die Eigenschaften der jeweiligen Begriffe für die Kanten- und die Vertexversion ähnlich, die Werte stimmen aber im allgemeinen nicht überein. Man kann die im folgenden erläuterten Abschätzungen angeben.

Lemma 3.15 *In einem lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen gilt von allen Vertizes n_i aus*

$$\begin{aligned} & \underline{D}_C(n_i) \le \underline{D}_C^{(E)}(n_i) \le 2\overline{D}_C(n_i) - 1 \\ \textit{und} \quad & \overline{D}_C(n_i) \le \overline{D}_C^{(E)}(n_i) \le 2\overline{D}_C(n_i) - 1\,. \end{aligned}$$

Beweis. Jeder Vertex in $\partial\mathcal{U}_k(n_i)$ muß mit mindestens einem Vertex aus $\partial\mathcal{U}_{k-1}(n_i)$ durch eine Kante verbunden sein. Also gilt für alle $k > 0$ die Ungleichung $r_k(n_i) \le r_k^{(E)}(n_i)$, so daß $\underline{D}_C(n_i) \le \underline{D}_C^{(E)}(n_i)$ und $\overline{D}_C(n_i) \le \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$ folgen. Andererseits kann jeder Vertex aus $\partial\mathcal{U}_k(n_i)$ innerhalb von $\mathcal{U}_k(n_i)$ höchstens zu allen Vertizes aus $\partial\mathcal{U}_{k-1}(n_i)$ und zu allen Vertizes aus $\partial\mathcal{U}_k(n_i)$ verbunden sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} r_k^{(E)}(n_i) &\le r_{k-1}(n_i)r_k(n_i) + \tfrac{1}{2}r_k(n_i)(r_k(n_i)-1) \\ \Rightarrow \quad \frac{\ln r_k^{(E)}(n_i)}{\ln k} &\le \frac{\ln\left(r_{k-1}(n_i)r_k(n_i) + \frac{1}{2}r_k^2(n_i) - \frac{1}{2}r_k(n_i)\right)}{\ln k}\,. \end{aligned}$$

Setzt man $r'_k(n_i) := \max\{r_k(n_i), r_{k-1}(n_i)\}$, so folgt daraus

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k^{(E)}(n_i)}{\ln k} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}{r'_k}^2(n_i) - \frac{1}{2}r'_k(n_i)\right)}{\ln k} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{2\ln r'_k(n_i) + \ln\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{r'_k(n_i)}\right)}{\ln k} \\ &= 2\big(\overline{D}_C(n_i) - 1\big) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq 2\big(\overline{D}_C(n_i) - 1\big) + 1 = 2\overline{D}_C(n_i) - 1\,.$$

Die Ungleichung $\underline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq 2\overline{D}_C(n_i) - 1$ folgt direkt aus $\underline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$. Daß man hier nicht dieselbe Abschätzung wie für den Limes superior angeben kann, liegt an der Maximums-Bildung in Ungleichung (3.3), die das Infimum verändern kann. □

Unter Verwendung von Lemma 3.12 folgt eine Aussage für die Skalierungsdimension.

Korollar 3.16 *Existieren die Konnektivitätsdimensionen $D_C(n_i)$ und $D_C^{(E)}(n_i)$ für einen Vertex n_i, dann gilt $D_S(n_j) \leq D_S^{(E)}(n_j) \leq 2D_S(n_j) - 1$ für alle n_j in der Zusammenhangskomponente von n_i.*

Beweis. Da nach Voraussetzung $D_C(n_i)$ und $D_C^{(E)}(n_i)$ existieren, gelten nach Lemma 3.12 die Gleichungen $D_S(n_i) = D_C(n_i)$ und $D_S^{(E)}(n_i) = D_C^{(E)}(n_i)$. Also überträgt sich Lemma 3.15 auf die Skalierungsdimension und ergibt $D_S(n_i) \leq D_S^{(E)}(n_i) \leq 2D_S(n_i) - 1$. Nach Lemma 3.5 sind $D_S(n_j)$ und $D_S^{(E)}(n_j)$ aber für alle Vertizes n_j in der Zusammenhangskomponente von n_i gleich, so daß die Ungleichung für alle diese Vertizes gilt. □

Im allgemeinen Fall kann man für die Skalierungsdimension nur eine etwas schwächere Abschätzung angeben.

Lemma 3.17 *In einem lokal endlichen, ungerichteten einfachen Graphen gilt von jedem Vertex n_i aus*

$$\begin{aligned} \underline{D}_S(n_i) \leq \underline{D}_S^{(E)}(n_i) &\leq 2\underline{D}_S(n_i) \\ \textit{und} \quad \overline{D}_S(n_i) \leq \overline{D}_S^{(E)}(n_i) &\leq 2\overline{D}_S(n_i)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Wie schon im Beweis zu Lemma 3.15 gesehen, gilt für $k > 0$ die Relation $r_k^{(E)}(n_i) \geq r_k(n_i)$, so daß mit $r_0^{(E)}(n_i) = 0$ und $r_0(n_i) = 1$ die Ungleichung $u_k^{(E)}(n_i) \geq u_k(n_i) - 1$ folgt. Daraus erhält man sofort $\underline{D}_S(n_i) \leq \underline{D}_S^{(E)}(n_i)$ und $\overline{D}_S(n_i) \leq \overline{D}_S^{(E)}(n_i)$. Für die andere Richtung überlegt man sich, daß innerhalb von $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$ nicht mehr Kanten sein können als in einem Simplex, d. h. maximal vernetzten Graphen, mit $u_k(n_i)$ Vertizes. Also folgt

$$\frac{\ln u_k^{(E)}(n_i)}{\ln k} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{2}u_k(n_i)(u_k(n_i) - 1)\right)}{\ln k}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{D}_S^{(E)}(n_i) \leq 2\underline{D}_S(n_i) \quad \text{und} \quad \overline{D}_S^{(E)}(n_i) \leq 2\overline{D}_S(n_i)\,.$$

□

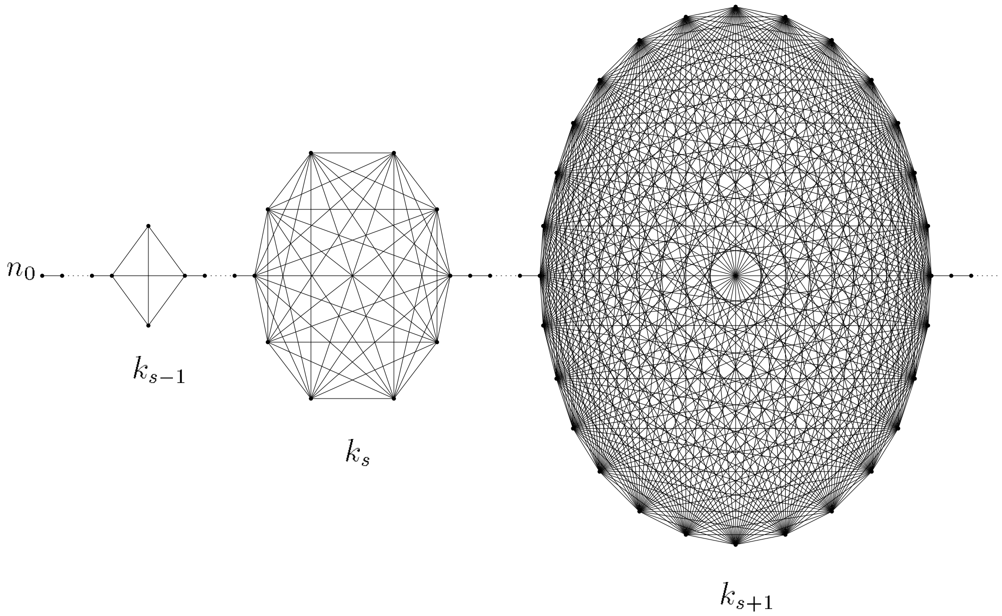


Abbildung 3.4: Spezieller Graph, bei dem die Kanten-Skalierungsdimension das Doppelte der Skalierungsdimension ist. In gewissen Abständen sind Simplizes in eine einfache Kette eingefügt. Bis auf den ersten Vertex haben die Vertizes dieser Simplizes alle Abstand k_s zu n_0. Demnach ist $r^{(E)}_{k_s}(n_0) = \frac{1}{2} r_{k_s}(n_0)\big(r_{k_s}(n_0) - 1\big) + r_{k_s}(n_0)$. Näheres zu diesem Graphen findet man im Text.

Die Abschätzung in Lemma 3.17 scheint zunächst unnötig grob zu sein. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß sich zumindest die Abschätzung für den Limes superior in Lemma 3.17 nicht verschärfen läßt.

Beispiel 3.18 Wir konstruieren einen Graphen gemäß Abbildung 3.4. Dabei seien die Stellen k_s und die Größen $r_{k_s}(n_0)$ der Umgebungen $\partial\mathcal{U}_{k_s}(n_0)$ so aufeinander abgestimmt, daß einerseits

$$\overline{D}_C(n_0) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_i)}{\ln k} + 1$$

endlich ist, andererseits aber $r_{k_s}(n_0) = \frac{1}{2} u_{k_s}(n_0)$ gilt. Im Abstand k_s zu n_0 kommen also ebenso viele Vertizes hinzu, wie zuvor insgesamt im Graphen enthalten waren. Weiterhin sei der Graph an den Stellen k_s so dicht vernetzt, daß $r^{(E)}_{k_s}(n_0) \geq \frac{1}{2}\big(r_{k_s}(n_0)\big)^2$ gilt. Diese Forderung kann erfüllt werden, da die maximal mögliche Vernetzung, wie sie in Abbildung 3.4 dargestellt ist, $r^{(E)}_{k_s}(n_0) = \frac{1}{2} r_{k_s}(n_0)\big(r_{k_s}(n_0) - 1\big) + r_{k_s}(n_0)$ liefert. Mit diesen Konstruktionsmerkmalen hat man

$$\frac{\ln u^{(E)}_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} \geq \frac{\ln r^{(E)}_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} \geq \frac{2\ln r_{k_s}(n_0) - \ln 2}{\ln k_s} \geq \frac{2(\ln u_{k_s}(n_0) - \ln 2) - \ln 2}{\ln k_s}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u^{(E)}_k(n_0)}{\ln k} \geq 2 \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k}\,.$$

Dabei wurde verwendet, daß nach Konstruktion die Stellen k_s genau die Stellen sind, an denen $\frac{\ln u_{k_s}^{(E)}(n_0)}{\ln k_s}$ und $\frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s}$ lokale Maxima haben, so daß andere Stellen bei der Supremumsbildung keine Rolle spielen.
Zumindest die Abschätzung für den Limes superior in Lemma 3.17 läßt sich im allgemeinen Fall also nicht weiter verschärfen. □

Bei der Untersuchung des Verhältnisses von Konnektivitäts- und Skalierungsdimension wurde durch Beispiel 3.14 gezeigt, daß die gleichmäßige Beschränkung des Vertexgrades nicht die Konvergenz zu denselben Werten für Konnektivitäts- und Skalierungsdimension bewirkte. Im Gegensatz dazu ist eine gleichmäßige Beschränkung des Vertexgrades an dieser Stelle die adäquate Forderung zur Verbesserung der Eigenschaften.

Lemma 3.19 *Ist der Vertexgrad in einem ungerichteten einfachen Graphen gleichmäßig beschränkt, so gilt für alle Vertizes n_i*

$$\underline{D}_C^{(E)}(n_i) = \underline{D}_C(n_i)\,, \quad \overline{D}_C^{(E)}(n_i) = \overline{D}_C(n_i)\,,$$
$$\underline{D}_S^{(E)}(n_i) = \underline{D}_S(n_i) \quad \textit{und} \quad \overline{D}_S^{(E)}(n_i) = \overline{D}_S(n_i)\,.$$

Beweis. Sei der Vertexgrad durch d beschränkt. Dann gelten für $k > 0$ die Relationen $r_k(n_i) \leq r_k^{(E)}(n_i) \leq d r_k(n_i)$ und $u_k(n_i) - 1 \leq u_k^{(E)}(n_i) \leq d\big(u_k(n_i) - 1\big)$. Daraus folgt direkt die Behauptung. □

Aus dieser Aussage folgt, daß zumindest bei Graphen mit gleichmäßig beschränktem Vertexgrad das Einfügen von Kanten mit den Einschränkungen aus Lemma 3.8, also endlichem Abstand zwischen neu verbundenen Vertizes und nur endlich vielen neuen Kanten zwischen Vertizes mit einem Abstand größer einer Konstante l, die Kanten-Skalierungsdimension invariant läßt.

Die zunächst plausibel klingende Aussage, die Existenz der Konnektivitätsdimension impliziere die Existenz der Kanten-Konnektivitätsdimension, gilt nicht. Sie wird durch das folgende Beispiel falsifiziert.

Beispiel 3.20 Wir konstruieren einen Graphen $\mathcal{G}$ von einem zentralen Vertex n_0 aus durch Zufügen von Vertizes und Kanten. Dies geschehe so, daß $r_k(n_0) = \lfloor k^{D-1} \rfloor$ für ein festes $D > 1$ gilt. Damit ist $D_C(n_0) = D$. Dann fügen wir so viele zusätzlich Kanten ein, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Vertizes der Umgebungen $\partial\mathcal{U}_{2k-1}(n_0)$ mit denen aus $\partial\mathcal{U}_{2k}(n_0)$ und die Vertizes aus $\partial\mathcal{U}_{2k}(n_0)$ mit sich selbst maximal vernetzt sind. Andererseits seien die Vertizes aus $\partial\mathcal{U}_{2k}(n_0)$ mit denen aus $\partial\mathcal{U}_{2k+1}(n_0)$ nur minimal vernetzt und die aus $\partial\mathcal{U}_{2k+1}(n_0)$ überhaupt nicht mit sich selbst. Dann hat man

$$\begin{aligned} r_{2k}^{(E)}(n_0) &= \lfloor (2k-1)^{D-1} \rfloor \lfloor (2k)^{D-1} \rfloor + \tfrac{1}{2} \lfloor (2k)^{D-1} \rfloor \big(\lfloor (2k)^{D-1} \rfloor - 1 \big) \\ \text{und} \quad r_{2k+1}^{(E)}(n_0) &= \lfloor (2k+1)^{D-1} \rfloor\,. \end{aligned}$$

Es folgt $\underline{D}_C^{(E)}(n_0) = D$ und $\overline{D}_C^{(E)}(n_0) = 2(D-1)+1 = 2D-1$. Also existiert die Kanten-Konnektivitätsdimension nicht. $\square$

Durch leichte Modifikation von Beispiel 3.20 sieht man, daß auch die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel 3.21 Wir konstruieren einen Graphen wie in Beispiel 3.20 mit dem Unterschied, daß für die *Kanten*-Umgebungsränder $r_k^{(E)}(n_0) = \lfloor k^{D-1} \rfloor$ für ein $D > 1$ gilt. Damit hat man $D_C^{(E)}(n_0) = D$. Wir verwenden bei der Konstruktion die maximal mögliche Anzahl von Vertizes für die Umgebungsränder $\partial\mathcal{U}_{2k}(n_0)$ und die minimal notwendige Anzahl von Vertizes für $\partial\mathcal{U}_{2k+1}(n_0)$, die mit den vorgegebenen Größen $r_k^{(E)}(n_0)$ verträglich sind. Auf diese Weise erhält man

$$r_{2k}(n_0) = \mathcal{O}\big(r_{2k}^{(E)}(n_0)\big) \quad \text{und} \quad r_{2k+1}(n_0) = \mathcal{O}\Big(\sqrt{r_{2k+1}^{(E)}(n_0)}\Big)$$

und damit $\overline{D}_C(n_0) = D$ und $\underline{D}_C(n_0) = \big(\frac{1}{2}(D-1)\big) + 1 = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}$. Also existiert die Konnektivitätsdimension nicht, obwohl die Kanten-Konnektivitätsdimension existiert. $\square$

In Lemma 3.15 haben wir gezeigt, daß die Werte von Kanten-Konnektivitätsdimension und Konnektivitätsdimension voneinander abweichen. Die Beispiele 3.20 und 3.21 zeigen, daß man nicht einmal Aussagen über die Existenz des einen Begriffs machen kann, wenn man nur die Information der Existenz des anderen hat. Für die Skalierungs- und Kanten-Skalierungsdimension kann man Beispiele desselben Typs angeben, die zeigen, daß auch für diese Begriffe die Existenz des einen die des anderen nicht impliziert.

Beispiel 3.22 Sei $D > 1$ vorgegeben. Wir konstruieren ähnlich wie in Beispiel 3.18 von einem Vertex n_0 aus einen Graphen als eine einfache Kette, in der an geeigneten Stellen k_s zusätzlich so viele Vertizes hinzukommen, daß

$$\tfrac{1}{2}k_s^D \leq r_{k_s}(n_0) \leq k_s^D \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}k_s^D \leq u_{k_s-1}(n_0) \leq k_s^D$$

gilt. Die erste Gleichung ist eine Forderung an die Anzahl der an den Stellen k_s jeweils hinzukommenden Vertizes, die zweite eine Forderung für die Wahl der Teilfolge $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$. Die Ungleichungen implizieren $k_s^D \leq u_{k_s}(n_0) \leq 2k_s^D$. Weiterhin sei eine Teilfolge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ derart gegeben, daß

$$k_{s_{i+1}} \geq (k_{s_i+1})^2$$

gilt. Dann sei der Graph in allen Abständen k zu n_0 minimal vernetzt außer jeweils im Abstand k_{s_i+1}. Dort seien die Vertizes in $\partial\mathcal{U}_{k_{s_i+1}}(n_0)$ untereinander und mit denen aus $\partial\mathcal{U}_{k_{s_i+1}-1}(n_0)$ so stark vernetzt, daß man

$$r_{k_{s_i+1}}^{(E)} \geq \tfrac{1}{2}(r_{k_{s_i+1}})^2$$

hat. Der Quotient $\frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k}$ hat an den Stellen k_s lokale Maxima, so daß man

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k} = \limsup_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s}(n_0)}{\ln k_s} \le \limsup_{s\to\infty} \frac{\ln 2k_s^D}{\ln k_s} = D$$

erhält. Die lokalen Minima von $\frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k}$ liegen bei $k_s - 1$. Deshalb gilt

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_0)}{\ln k} = \liminf_{s\to\infty} \frac{\ln u_{k_s-1}(n_0)}{\ln(k_s-1)} \ge \liminf_{s\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}k_s^D\right)}{\ln(k_s-1)} = D\,.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt $D_S(n_0) = D$. Für die Kanten-Skalierungsdimension hingegen gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} u^{(E)}_{k_{s_i}}(n_0) &\le u^{(E)}_{k_{s_{i-1}+1}}(n_0) + u_{k_{s_i}}(n_0) \le \left(u_{k_{s_{i-1}+1}}(n_0)\right)^2 + u_{k_{s_i}}(n_0) \\ &\le 4(k_{s_{i-1}+1})^{2D} + 2(k_{s_i})^D \le 6(k_{s_i})^D\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die untere Kanten-Skalierungsdimension

$$\begin{aligned} &\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u^{(E)}_k(n_0)}{\ln k} \le \liminf_{i\to\infty} \frac{\ln u^{(E)}_{k_{s_i}}(n_0)}{\ln k_{s_i}} \le \liminf_{i\to\infty} \frac{\ln 6 + D\ln k_{s_i}}{\ln k_{s_i}} = D \\ \Rightarrow\quad &\underline{D}^{(E)}_S(n_0) \le D\,. \end{aligned}$$

Andererseits gelten die Abschätzungen

$$u^{(E)}_{k_{s_i+1}}(n_0) \ge r^{(E)}_{k_{s_i+1}}(n_0) \ge \tfrac{1}{2}\left(r_{k_{s_i+1}}(n_0)\right)^2 \ge \tfrac{1}{8}(k_{s_i+1})^{2D}\,,$$

so daß für die obere Kanten-Skalierungsdimension

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u^{(E)}_k(n_0)}{\ln k} &\ge \limsup_{i\to\infty} \frac{\ln u^{(E)}_{k_{s_i+1}}(n_0)}{\ln k_{s_i+1}} \\ &\ge \limsup_{i\to\infty} \frac{-\ln 8 + 2D\ln k_{s_i+1}}{\ln k_{s_i+1}} = 2D \\ \Rightarrow\quad \overline{D}^{(E)}_S(n_0) &\ge 2D \end{aligned}$$

gilt. Somit existiert die Kanten-Skalierungsdimension nicht, obwohl die Skalierungsdimension existiert. □

Ein Beispiel für die Umkehrung, daß auch die Existenz der Kanten-Skalierungsdimension nicht die Existenz der Skalierungsdimension impliziert, erhält man analog zur Entstehung von Beispiel 3.21 aus 3.20 durch Vertauschen der Rollen der Umgebungsgrößen von Kanten-Umgebungen und Vertex-Umgebungen in Beispiel 3.22.

Abschließend untersuchen wir in diesem Abschnitt noch das Verhalten der Dimensionsbegriffe, wenn man Graphen auf verschiedene Weisen kombiniert. Dabei seien die zu kombinierenden Graphen zur Übersichtlichkeit im folgenden stets zusammenhängend. Zunächst sieht man, daß unter disjunkter Vereinigung zweier Graphen deren Dimensionen als Dimensionen der durch sie gebildeten Zusammenhangskomponenten erhalten bleiben. Kombiniert man hingegen zwei Graphen durch Identifizierung eines Vertex, so ist die resultierende Skalierungsdimension das Maximum der beiden Skalierungsdimensionen.

Lemma 3.23 *Seien $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ zwei lokal endliche, ungerichtete und zusammenhängende einfache Graphen, deren Skalierungsdimensionen $D_S^{(1)}$ und $D_S^{(2)}$ existieren. Sei $\mathcal{G}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$, wobei zusätzlich ein Vertex $n_i^{(1)}$ von $\mathcal{G}^{(1)}$ mit einem Vertex $n_j^{(2)}$ von $\mathcal{G}^{(2)}$ identifiziert werde. Dann ist die Skalierungsdimension von $\mathcal{G}$ das Maximum der beiden Skalierungsdimensionen $D_S^{(1)}$ und $D_S^{(2)}$. Dasselbe gilt für die Kanten-Skalierungsdimension.*

Beweis. Sei n_i der Vertex in $\mathcal{G}$, der durch Identifizierung von $n_i^{(1)}$ und $n_j^{(2)}$ entsteht. Dann gilt

$$u_k(n_i) = u_k^{(1)}(n_i) + u_k^{(2)}(n_i) - 1\,,$$

wobei $u_k^{(1)}(n_i)$ die Umgebungsgröße der Umgebung mit Radius k um $n_i^{(1)}$ in $\mathcal{G}^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ die Umgebungsgröße der k-Umgebung um $n_j^{(2)}$ in $\mathcal{G}^{(2)}$ bezeichnet. Durch die -1 wird berücksichtigt, daß der identifizierte Vertex nur einmal gezählt werden darf. Nun erhält man die Abschätzung

$$\max\{u_k^{(1)}(n_i), u_k^{(2)}(n_i)\} \;\leq\; u_k(n_i) \;\leq\; 2\max\{u_k^{(1)}(n_i), u_k^{(2)}(n_i)\}\,.$$

Sei $\epsilon > 0$. Da nach Voraussetzung die Skalierungsdimensionen von $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ existieren, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq N$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} k^{D_S^{(1)}-\epsilon} \;&\leq\; u_k^{(1)}(n_i) \;\leq\; k^{D_S^{(1)}+\epsilon} \\ \text{und}\quad k^{D_S^{(2)}-\epsilon} \;&\leq\; u_k^{(2)}(n_i) \;\leq\; k^{D_S^{(2)}+\epsilon} \end{aligned}$$

gelten. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\max\{k^{D_S^{(1)}-\epsilon}, k^{D_S^{(2)}-\epsilon}\} \;\leq\; u_k(n_i) \;\leq\; 2\max\{k^{D_S^{(1)}+\epsilon}, k^{D_S^{(2)}+\epsilon}\} \\ \Rightarrow\quad &\frac{\left(\max\{D_S^{(1)}, D_S^{(2)}\} - \epsilon\right)\ln k}{\ln k} \;\leq\; \frac{\ln u_k(n_i)}{\ln k} \;\leq\; \frac{\ln 2 + \left(\max\{D_S^{(1)}, D_S^{(2)}\} + \epsilon\right)\ln k}{\ln k}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Der Beweis für die Kanten-Skalierungsdimension verläuft analog. □

Existiert die Konnektivitätsdimension von jedem Vertex zweier Graphen aus, so ergibt sich auch für die Konnektivitätsdimension des zusammengesetzten Graphen das Maximum der beiden Konnektivitätsdimensionen.

Lemma 3.24 *Seien $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ zwei lokal endliche, ungerichtete und zusammenhängende einfache Graphen, deren Konnektivitätsdimensionen $D_C^{(1)}(n_i^{(1)})$ und $D_C^{(2)}(n_j^{(2)})$ von allen Vertizes $n_i^{(1)}$ und $n_j^{(2)}$ aus existieren und damit gleich sind. Sei $\mathcal{G}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$, wobei zusätzlich ein Vertex $n_i^{(1)}$ von $\mathcal{G}^{(1)}$ mit einem Vertex $n_j^{(2)}$ von $\mathcal{G}^{(2)}$ identifiziert werde. Dann ist die Konnektivitätsdimension von $\mathcal{G}$ das Maximum der beiden Konnektivitätsdimensionen $D_C^{(1)}$ und $D_C^{(2)}$ ausgehend von allen Vertizes von $\mathcal{G}$. Dasselbe gilt für die Kanten-Konnektivitätsdimension.*

Beweis. Sei n_i wieder der Vertex, der durch Identifikation von $n_i^{(1)}$ mit $n_j^{(2)}$ entsteht. Es gilt analog zum Beweis von Lemma 3.23 die Gleichung

$$r_k(n_i) = r_k^{(1)}(n_i) + r_k^{(2)}(n_i) - 1\,.$$

Dann kann der Beweis analog zu dem von Lemma 3.23 geführt werden. Auch der Beweis für die Kanten-Konnektivitätsdimension verläuft analog. □

Unter gewissen Voraussetzungen ist die Skalierungsdimension bei der Bildung des kartesischen Produkts von Graphen additiv.

Lemma 3.25 *Seien $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ zwei lokal endliche, ungerichtete und zusammenhängende einfache Graphen, deren Skalierungsdimensionen $D_S^{(1)}$ und $D_S^{(2)}$ existieren und insbesondere endlich sind. Dann ist die Skalierungsdimension des kartesischen Produkts $\mathcal{G} := \mathcal{G}^{(1)} \times \mathcal{G}^{(2)}$ die Summe der Skalierungsdimensionen, $D_S = D_S^{(1)} + D_S^{(2)}$. Dieselbe Aussage gilt für die Kanten-Skalierungsdimension.*

Beweis. Wir verwenden das Symbol $\mathcal{U}_l^{(1)}(n_{(i,j)}) := \{n_{(k,j)} : n_k \in \mathcal{U}_l(n_i) \subset V^{(1)}\}$ und analog das Symbol $\partial\mathcal{U}_l^{(1)}(n_{(i,j)})$ sowie die entsprechenden Symbole bezüglich des zweiten Graphen. Für die Umgebungsgrößen um $n_{(0,0)}$ in $\mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned}
u_k(n_{(0,0)}) &= \sum_{l=0}^{k} \sum_{n_{(i,0)} \in \partial\mathcal{U}_l^{(1)}(n_{(0,0)})} \operatorname{Card}\mathcal{U}_{k-l}^{(2)}(n_{(i,0)}) \\
&= \sum_{l=0}^{k} r_l^{(1)}(n_0) u_{k-l}^{(2)}(n_0) \le u_k^{(1)}(n_0) u_k^{(2)}(n_0) \\
\Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\le \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln\left(u_k^{(1)}(n_0)\right) + \ln\left(u_k^{(2)}(n_0)\right)}{\ln k} \\
\Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\le D_S^{(1)} + D_S^{(2)}\,. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

In der anderen Richtung macht die Abschätzung etwas mehr Mühe. Man hat wie oben

$$u_k(n_{(0,0)}) = \sum_{l=0}^{k} r_l^{(1)}(n_0) u_{k-l}^{(2)}(n_0)\,.$$

Da nach Voraussetzung $D_S^{(1)}(n_0)$ und $D_S^{(2)}(n_0)$ existieren, gibt es zu allen $\epsilon > 0$ Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\begin{aligned} l^{D_S^{(1)}-\epsilon} &\leq u_l^{(1)}(n_0) \leq l^{D_S^{(1)}+\epsilon} \quad \forall l \geq N_1 \quad \text{und} \\ (k-l)^{D_S^{(2)}-\epsilon} &\leq u_{k-l}^{(2)}(n_0) \qquad \forall (k-l) \geq N_2 \end{aligned}$$

gilt. Für alle $k \geq 4(N_1 + N_2)$ gilt

$$\begin{aligned} u_k(n_{(0,0)}) &\geq \sum_{l=N_1}^{\frac{3}{4}k} r_l^{(1)}(n_0)(k-l)^{D_S^{(2)}-\epsilon} \geq \sum_{l=N_1}^{\frac{3}{4}k} r_l^{(1)}(n_0)\left(\tfrac{1}{4}k\right)^{D_S^{(2)}-\epsilon} \\ &\geq \left(u_{\frac{3}{4}k}^{(1)}(n_0) - u_{N_1}^{(1)}(n_0)\right)\left(\tfrac{1}{4}k\right)^{D_S^{(2)}-\epsilon} \\ &\geq \left(\left(\tfrac{3}{4}k\right)^{D_S^{(1)}-\epsilon} - N_1^{D_S^{(1)}+\epsilon}\right)\left(\tfrac{1}{4}k\right)^{D_S^{(2)}-\epsilon}. \end{aligned}$$

Ist nun $N' \geq N$ so groß, daß

$$\frac{\ln\left[\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{D_S^{(1)}-\epsilon} - \left(\frac{N_1}{k}\right)^{D_S^{(1)}-\epsilon} N_1^{2\epsilon}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{D_S^{(2)}-\epsilon}\right]}{\ln k} \geq -\epsilon$$

für alle $k \geq N'$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\ln u_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\geq D_S^{(1)} + D_S^{(2)} - 3\epsilon \qquad \forall k \geq N' \\ \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln u_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\geq D_S^{(1)} + D_S^{(2)} \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.4) folgt $D_S(n_{(0,0)}) = D_S^{(1)} + D_S^{(2)}$ und mit Lemma 3.5 folgt diese Gleichung von allen Vertizes aus.
Für die Kanten-Skalierungsdimension funktioniert der Beweis analog. □

Unter geeigneten Voraussetzungen gilt die Additivität der Dimension unter Bildung des kartesischen Produkts auch für die Konnektivitätsdimension.

Lemma 3.26 *Seien $\mathcal{G}^{(1)}$ und $\mathcal{G}^{(2)}$ zwei lokal endliche, ungerichtete und zusammenhängende einfache Graphen, deren Konnektivitätsdimensionen $D_C^{(1)}(n_i^{(1)})$ und $D_C^{(2)}(n_j^{(2)})$ von allen Vertizes $n_i^{(1)}$ und $n_j^{(2)}$ aus existieren und insbesondere endlich sind. Sie sind dann von allen Vertizes aus gleich und die Konnektivitätsdimension des kartesischen Produkts $\mathcal{G} := \mathcal{G}^{(1)} \times \mathcal{G}^{(2)}$ ist die Summe der Konnektivitätsdimensionen, $D_C = D_C^{(1)} + D_C^{(2)}$. Wieder gilt die Aussage auch für $D_C^{(E)}$.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu dem des vorhergehenden Lemmas. Man kann wieder die Umgebungsgrößen direkt angeben und abschätzen.

$$r_k(n_{(0,0)}) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{n_{(i,0)} \in \partial\mathcal{U}_l^{(1)}(n_{(0,0)})} \operatorname{Card} \partial\mathcal{U}_{k-l}^{(2)}(n_{(i,0)})$$

$$= \sum_{l=0}^{k} r_l^{(1)}(n_0) r_{k-l}^{(2)}(n_0) \leq \sum_{l=0}^{k} r_k^{(1)}(n_0) r_k^{(2)}(n_0)$$

Nun findet man $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq N$ die Ungleichungen $r_k^{(1)}(n_0) \leq k^{D_C^{(1)}-1+\epsilon}$ und $r_k^{(2)}(n_0) \leq k^{D_C^{(2)}-1+\epsilon}$ gelten. Damit hat man

$$r_k(n_{(0,0)}) \leq (k+1) k^{D_C^{(1)}+D_C^{(2)}-2+2\epsilon} .$$

Ist nun $N' \geq N$ so groß, daß für alle $k \geq N'$ die Ungleichung $\frac{\ln \frac{k+1}{k}}{\ln k} \leq \epsilon$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\ln r_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\leq D_C^{(1)} + D_C^{(2)} - 1 + 3\epsilon \\ \Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\leq D_C^{(1)} + D_C^{(2)} - 1 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Umgekehrt erhält man für ausreichend große k die Abschätzung

$$\begin{aligned} r_k(n_{(0,0)}) &\geq \sum_{l=\frac{1}{4}k}^{\frac{3}{4}k} l^{D_C^{(1)}-1-\epsilon} (k-l)^{D_C^{(2)}-1-\epsilon} \\ &\geq \tfrac{1}{2} k \left(\tfrac{1}{4}k\right)^{D_C^{(1)}-1-\epsilon} \left(\tfrac{1}{4}k\right)^{D_C^{(2)}-1-\epsilon} . \end{aligned}$$

Jetzt wählt man ein $N'' \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq N''$ die Ungleichung

$$\frac{\ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{D_C^{(1)}-1-\epsilon} \left(\frac{1}{4}\right)^{D_C^{(2)}-1-\epsilon} \right)}{\ln k} \geq -\epsilon$$

gilt, so daß man

$$\begin{aligned} \frac{\ln r_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\geq D_C^{(1)} + D_C^{(2)} - 1 - 3\epsilon \\ \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln r_k(n_{(0,0)})}{\ln k} &\geq D_C^{(1)} + D_C^{(2)} - 1 \end{aligned}$$

erhält. Zusammen mit (3.5) folgt die Aussage des Lemmas. Der Beweis für die Kanten-Konnektivitätsdimension verläuft analog. □

Die Aussage von Lemma 3.26 impliziert für die spezielle Klasse von Graphen, in denen die Konnektivitätsdimension von jedem Vertex aus existiert, die Aussage von Lemma 3.25. Dieses gilt aber auch wenn nur die Skalierungsdimension existiert.

Die Dimensionsbegriffe verhalten sich demnach genau so, wie man es erwartet, wenn die betrachteten Graphen nicht pathologisch sind. Insbesondere wenn die Konnektivitätsdimension von allen Vertizes aus existiert, sind die Eigenschaften der Begriffe erwartungsgemäß.

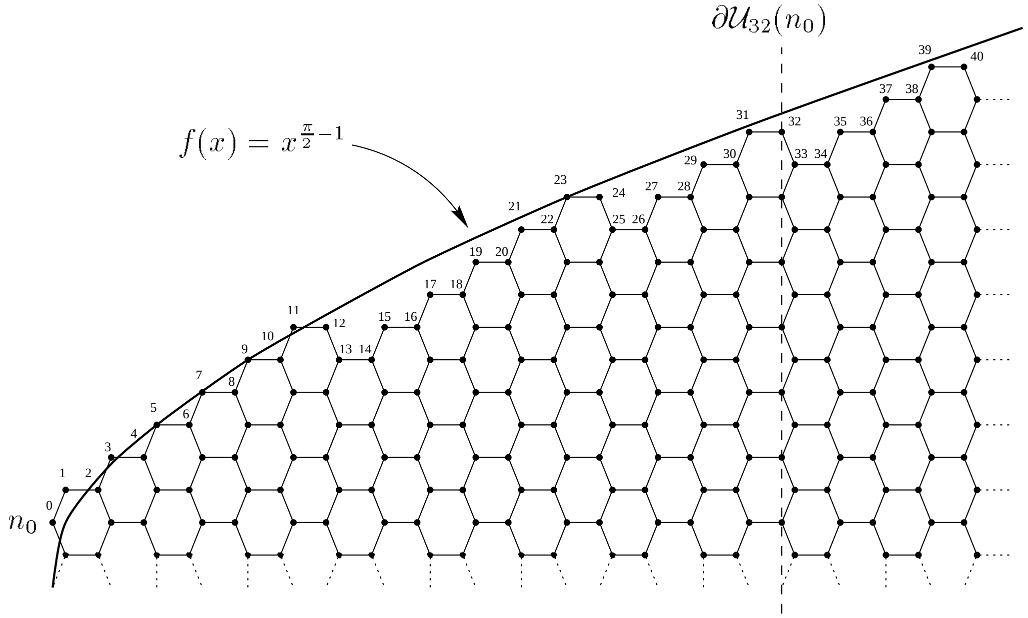


Abbildung 3.5: Konischer Graph mit Konnektivitätsdimension $D_C(n_0) = \frac{\pi}{2}$ von n_0 aus und Skalierungdimension $D_S = \frac{\pi}{2}$ von jedem Vertex aus.

3.2 Konstruktion spezieller Graphen

Nachdem im letzten Kapitel verschiedene Dimensionsbegriffe definiert und untersucht wurden, schließt sich in natürlicher Weise die Frage an, welche typischen Beispiele es für Graphen verschiedener Dimensionen gibt. In diesem Kapitel werden solche typischen Beispiele konstruiert.
Typischen Beispiele für Graphen mit ganzzahliger Skalierungsdimension sind Gittergraphen. Graphen mit der Dimension ∞ sind typischerweise Baumgraphen. Die Skalierungsdimension ist aber nicht notwendig ganzzahlig oder ∞. Es zeigt sich, daß man zu jeder beliebig vorgegebenen reellen Dimension $D \geq 1$ einen sogenannten konischen Graphen konstruieren kann, der Skalierungsdimension und Konnektivitätsdimension D hat. Diese Graphen heißen konisch, weil sie bei Dimensionen zwischen eins und zwei an Kegel erinnern. Sei zunächst $1 \leq D \leq 2$. Dann konstruiert man den entsprechenden konischen Graphen nach der folgenden Vorschrift:

Konstruktion 3.27 Die Konstruktion erfolgt wie in Abbildung 3.5 dargestellt. Dort ist $D = \frac{\pi}{2}$ gewählt. Der Graph ist lokal ein zweidimensionales Gitter und hat einen Vertex n_0, wie er in der Abbildung ganz links eingezeichnet ist, von dem aus die Umgebungsränder $\partial\mathcal{U}_k(n_0)$ immer genau $\lfloor k^{D-1} \rfloor$ Vertizes umfassen. In der Abbildung bestehen die $\partial\mathcal{U}_k(n_0)$, wie für $\partial\mathcal{U}_{32}(n_0)$ angedeutet, aus den jeweils übereinanderliegenden Vertizes. Auf diese Weise ist gewährleistet, daß $D_C(n_0)$ existiert und gleich D ist. Damit folgt nach Lemma 3.12 und Lemma 3.5, daß der konstruierte Graph von jedem Vertex aus Skalierungsdimension $D_S = D$ hat.

Der in Abbildung 3.5 dargestellt Graph deutet auch noch auf eine weitere Besonderheit dieser Konstruktion hin. Schließt man den Graphen durch Verbindung der gepunktet angedeuteten Kanten jeweils mit dem obersten darüberliegenden Vertex, so erhält man die schon erwähnte kegelartige Form. Man erreicht, wenn man zusätzlich noch ein Stück um n_0 herum wegläßt und die Vertizes dort geschickt verbindet, überall den Vertexgrad drei. Lokal ist der Graph dann überhaupt nicht von einem trivalenten zweidimensionalen Gitter zu unterscheiden. Die nicht-ganzzahlige Skalierungsdimension ist daher ein globales Merkmal des gesamten Graphen.
Ist eine Dimension $D > 2$ vorgegeben, so konstruiert man einen passenden konischen Graphen wie folgt:

Konstruktion 3.28 Man konstruiert einen konischen Graphen der Dimension $D - \lfloor D-1 \rfloor$ wie in Konstruktion 3.27 beschrieben. Dann bildet man das kartesische Produkt mit dem $\lfloor D-1 \rfloor$-dimensionalen kubischen Gittergraphen. Nach Lemma 3.25 erhält man so einen D-dimensionalen Graphen.

Eine andere Variante spezieller Graphen mit nicht-ganzzahliger Dimension sind Graphen, die man über eine gewisse Konstruktionsvorschrift aus dem Algorithmus zur Bestimmung der Kästchenzahldimension spezieller selbstähnlicher Mengen gewinnt. Wir verwenden hier selbstähnliche Mengen M, die folgenden Bedingungen genügen:

(i) M ist im Einheitswürfel $I^n \subset \mathbb{R}^n$ enthalten.

(ii) M ist strikt selbstähnlich mit definierenden Ähnlichkeitsabbildungen der Form

$$\begin{aligned} S^{(l)} : I^n &\to I^n \\ x &\mapsto c^{(l)} \cdot x + b^{(l)} \end{aligned}$$

mit $c^{(l)} \in]0,1[$ und $b^{(l)} \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, L$.

(iii) Das Innere der Bilder von I^n unter zwei verschiedenen Ähnlichkeitsabbildungen $S^{(l_1)}$ und $S^{(l_2)}$, $l_1 \neq l_2$, ist disjunkt.

Selbstähnlichen Mengen dieses Typs kann man durch eine geeignete Konstruktionsvorschrift einen zugehörigen Graphen zuordnen. Wir illustrieren das Vorgehen dabei an dem Beispiel des in Abbildung 3.6 veranschaulichten Malteser Kreuzes. Die definierenden Ähnlichkeitsabbildungen sind

$$S^{(1)} : \vec{x} \longmapsto \frac{1}{3}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^{(2)} : \vec{x} \longmapsto \frac{1}{3}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad S^{(3)} : \vec{x} \longmapsto \frac{1}{3}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

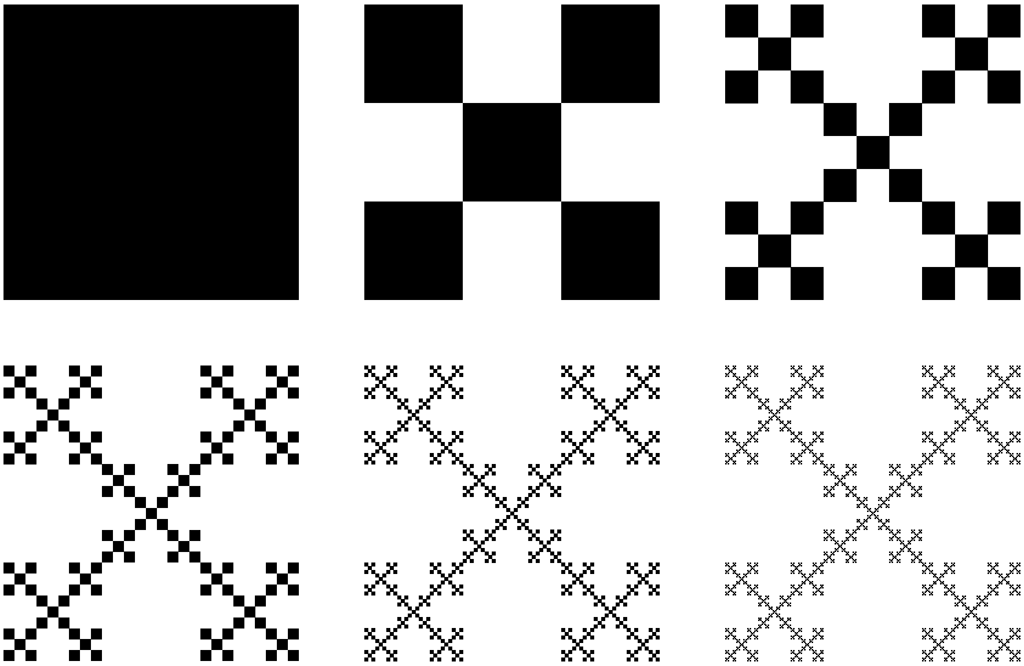


Abbildung 3.6: Prä-Fraktale des sogenannten Malteser Kreuzes.

$$S^{(4)}: \vec{x} \longmapsto \frac{1}{3}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^{(5)}: \vec{x} \longmapsto \frac{1}{3}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Konstruktion 3.29 Sei $M \subset I^n \subset \mathbb{R}^n$ eine selbstähnliche Menge des beschriebenen Typs. Sei weiterhin $x_0 := \frac{1}{1-c}b^{(1)}$ der Fixpunkt der Ähnlichkeitsabbildung $S^{(1)}$. Dieser Punkt ist in M enthalten, da M durch iteriertes Anwenden der Ähnlichkeitsabbildungen auf ganz I^n gewonnen werden kann [Fal]. Nun wird I^n so mit einem achsenparallelen kubischen Gitter (KG), dessen Kuben Seitenlänge $c^{(1)}$ besitzen, überdeckt, daß x_0 nur in einem der Kuben liegt. Jedem Kubus des überdeckenden Gitters, der nichtleeren Schnitt mit M besitzt, ordnen wir einen Vertex zu. Der Vertex, der dem Kubus entspricht, der x_0 enthält, wird mit n_0 bezeichnet. Dann werden alle Vertizes, die zu Kuben gehören, die nichtleeren Schnitt miteinander haben, durch Kanten verbunden. Auf diese Weise erhält man einen Graphen $\mathcal{G}^{(1)} = (V^{(1)}, E^{(1)})$.
Die Ähnlichkeitsabbildung $S^{(1)}$ kann leicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu einer Abbildung $\tilde{S}^{(1)}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto c^{(1)} \cdot x + b^{(1)}$ fortgesetzt werden. Man kann $\tilde{S}^{(1)}$ nun $(N-1)$-mal auf das überdeckende kubische Gitter anwenden und erhält ein kubisches Gitter mit Kuben der Seitenlänge $(c^{(1)})^N$. Mit diesem Gitter kann man die oben beschriebene Zuordnung wiederholen und erhält so zu jedem $N \in \mathbb{N}$ einen Graphen $\mathcal{G}^{(N)}$ mit jeweils einem ausgezeichneten Vertex n_0. Die ersten drei Konstruktionsschritte für das Beispiel des Malteser Kreuzes sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Da M selbstähnlich und $S^{(1)}$ eine Ähnlichkeitsabbildung von M ist und aufgrund der Disjunktheitsbedingung (iii), ist der Untergraph von $\mathcal{G}^{(N+1)}$, der durch die Über-

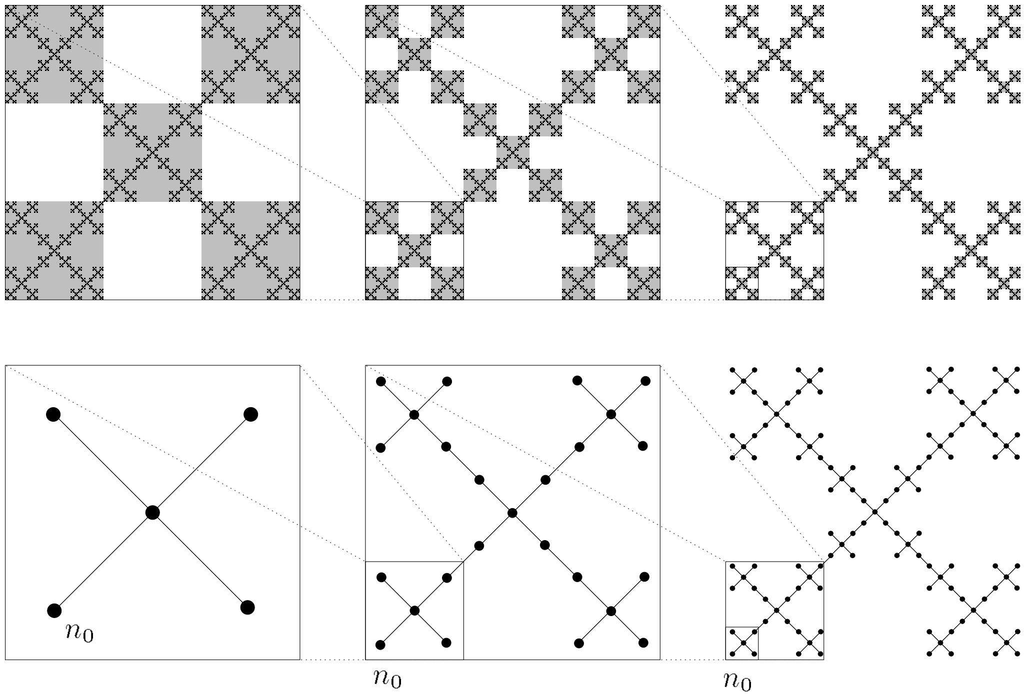


Abbildung 3.7: Die ersten drei Konstruktionsschritte zur Konstruktion eines zu dem Malteser Kreuz gehörenden Graphen. Man sieht sehr deutlich, daß eine immer größer werdende Umgebung von n_0 bei der weiteren Konstruktion invariant bleibt.

deckung von $(S^{(1)})^2(M)$ mit dem Gitter $(\tilde{S}^{(1)})^N(KG)$ entsteht, bis auf eventuelle Änderungen am Rand identisch mit dem durch Überdeckung von $S^{(1)}(M)$ mit dem Gitter $(\tilde{S}^{(1)})^{N-1}(KG)$ entstandenen Untergraphen von $\mathcal{G}^{(N)}$. In gleicher Weise ist der Untergraph von $\mathcal{G}^{(N+2)}$, der durch Überdeckung von $(S^{(1)})^2(M)$ durch $(\tilde{S}^{(1)})^{N+1}(KG)$ entsteht identisch mit dem aus Überdeckung von $S^{(1)}(M)$ durch $(\tilde{S}^{(1)})^N(KG)$ entstandenen und so fort. Also ist eine immer größer werdende Umgebung von n_0 bei den weiteren Schritten der Konstruktion in allen $\mathcal{G}^{(N)}$ gleich (s. Abbildung 3.7 für ein Beispiel). In diesem Sinn konvergiert die Folge der Graphen $\mathcal{G}^{(N)}$ punktweise gegen einen Graphen $\mathcal{G}^{(\infty)}$. Für die Untersuchung lokaler Eigenschaften des Grenzgraphen genügt demnach die Untersuchung der jeweiligen Eigenschaft in einem hinreichend großen Graphen $\mathcal{G}^{(N)}$.

Wir identifizieren im folgenden die Graphen $\mathcal{G}^{(N)}$ mit den entsprechenden Untergraphen in $\mathcal{G}^{(K)}$, $K > N$, die durch die Auswahl von n_0 bestimmt sind. Auf diese Weise kann man sie als eine aufsteigende Folge von ineinander enthaltenen Graphen interpretieren. Der Grenzgraph ist dann so etwas wie ein Kolimes. Man kann die Skalierungsdimension des entstandenen Graphen $\mathcal{G}^{(\infty)}$ berechnen.

Lemma 3.30 *Ist $\mathcal{G}^{(\infty)}$ zusammenhängend, so existiert die Skalierungsdimension und ist identisch mit der Kästchenzahldimension der zugrundeliegenden selbstähnlichen Menge M.*

Beweis. Wir untersuchen die Länge des kürzesten Weges von n_0 zu einem Vertex außerhalb $\mathcal{G}^{(N)}$ aufgefaßt als Untergraph von $\mathcal{G}^{(\infty)}$. Damit erhält man ein Maß dafür, für welche k die Umgebungen $\mathcal{U}_k(n_0)$ noch in $\mathcal{G}^{(N)} \subset \mathcal{G}^{(\infty)}$ enthalten sind. Für die Überlegung genügt es, $\mathcal{G}^{(N)}$ als einen Teilgraphen von $\mathcal{G}^{(N+1)}$ zu betrachten, da sich die nähere Umgebung von $\mathcal{G}^{(N)}$ in $\mathcal{G}^{(N+1)}$ bei der weiteren Konstruktion nicht mehr verändert.
Der minimale Abstand von x_0 zu Punkten in I^n außerhalb von $S^{(1)}(I^n)$ ist durch

$$\begin{aligned} d_{\min} := \min \Big(\{ \frac{1}{1-c^{(1)}} b_i^{(1)} - b_i^{(1)} : b_i^{(1)} \neq 0 \} \\ \cup \{ b_i^{(1)} + c^{(1)} - \frac{1}{1-c^{(1)}} b_i^{(1)} : b_i^{(1)} \neq 1 - c^{(1)} \} \Big) > 0 \end{aligned}$$

gegeben. Die Komponenten i mit $b_i^{(1)} = 0$ bzw. $b_i^{(1)} = 1 - c^{(1)}$ kann man bei der Minimumsbildung auslassen, weil x_0 bezüglich dieser Komponenten am Rand von I^n liegt und somit keine Punkte *innerhalb* $I^n \backslash S^{(1)}(I^n)$ den bei diesen Werten resultierenden Abstand Null zu x_0 besitzen. Die Kubengröße bei der Konstruktion von $\mathcal{G}^{(N+1)}$ ist $(c^{(1)})^{N+1}$, so daß man im Graphen $\mathcal{G}^{(N)} \subset \mathcal{G}^{(N+1)}$, der durch Überdeckung von $S^{(1)}(M)$ gebildet wird, mindestens $\lfloor \frac{d_{\min}}{(c^{(1)})^{N+1}} \rfloor$ Schritte benötigt, um zu einem Vertex zu gelangen, der zu einem Kubus außerhalb $S^{(1)}(I^n)$ gehört und somit nicht mehr in $\mathcal{G}^{(N)} \subset \mathcal{G}^{(N+1)}$ enthalten ist.
In ähnlicher Weise schätzt man auch die Weglänge in $\mathcal{G}^{(N+1)}$ ab, die notwendig ist, um von n_0 aus mindestens alle Vertizes von $\mathcal{G}^{(N)} \subset \mathcal{G}^{(N+1)}$ zu erreichen. Wir setzen

$$d_{\max} := \sum_{i=1}^{n} \max \{ \frac{1}{1-c^{(1)}} b_i^{(1)} - b_i^{(1)}, b_i^{(1)} + c^{(1)} - \frac{1}{1-c^{(1)}} b_i^{(1)} \} > 0 \,.$$

Im ungünstigsten Fall kann man sich nur - auf die Situation im $\mathbb{R}^n$ übersetzt - in Schritten von $(c^{(1)})^{N+1}$ parallel zu den Koordinatenachsen bewegen, so daß man mit höchstens $\lfloor \frac{d_{\max}}{(c^{(1)})^{N+1}} \rfloor$ Schritten alle Vertizes aus $\mathcal{G}^{(N)} \subset \mathcal{G}^{(N+1)}$ erreicht.
Mit diesen Überlegungen erhält man die Abschätzung

$$u_{\lfloor \frac{d_{\min}}{(c^{(1)})^{N+1}} \rfloor}(n_0) \,\leq\, \operatorname{Card} V^{(N)} \,\leq\, u_{\lfloor \frac{d_{\max}}{(c^{(1)})^{N+1}} \rfloor}(n_0) \,.$$

Man sieht, daß $\operatorname{Card} V^{(N)} = N_\delta(M)$ mit der kubischen Überdeckung aus der obigen Konstruktion mit $\delta = (c^{(1)})^N$ gilt. Das heißt, daß die Anzahl der Vertizes in $\mathcal{G}^{(N)}$ gerade die für die Berechnung der Kästchenzahldimension relevante Anzahl $N_\delta(M)$ der die Menge M schneidenden Kuben der Kantenlänge $\delta = (c^{(1)})^N$ ist. Also haben wir die Abschätzung

$$\frac{\ln u_{\lfloor \frac{d_{\min}}{c^{(1)}\delta} \rfloor}(n_0)}{\ln \frac{1}{\delta}} \leq \frac{\ln N_\delta(M)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln u_{\lfloor \frac{d_{\max}}{c^{(1)}\delta} \rfloor}(n_0)}{\ln \frac{1}{\delta}} \,.$$

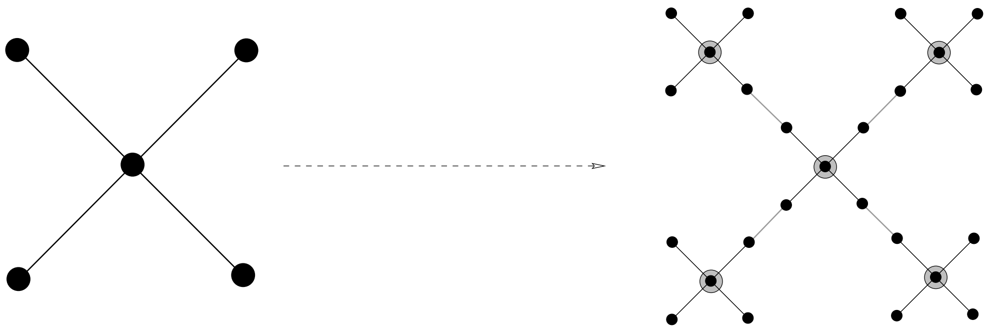


Abbildung 3.8: Veranschaulichung der Konstruktionen durch Einfügen des Generators am Beispiel des zum Malteser Kreuz gehörenden Generators.

Bildet man nun den Limes inferior und den Limes superior, so folgt sofort

$$\begin{aligned}\underline{D}_S(n_0) \leq \underline{D}_B(M) \leq \underline{D}_S(n_0)\\ \overline{D}_S(n_0) \leq \overline{D}_B(M) \leq \overline{D}_S(n_0)\,,\end{aligned}$$

wobei $\underline{D}_B(M)$ und $\overline{D}_B(M)$ die untere und obere Kästchenzahldimension bezeichnen. Lemma 3.5 liefert dann wieder die Unabhängigkeit der Skalierungsdimension von der Auswahl von n_0. □

Ist $c^{(l)}$ wie im Beispiel des Malteser Kreuzes für alle l gleich, etwa c, und sind die Komponenten der Vektoren $b^{(l)}$ Vielfache von c, so ist nicht nur der aus der Überdeckung von $(S^{(1)})^2(M)$ durch das Gitter $(\tilde{S}^{(1)})^N(KG)$ hervorgehende Graph identisch zu dem aus der Überdeckung von $S^{(1)}(M)$ durch das Gitter $(\tilde{S}^{(1)})^{N-1}(KG)$ hervorgehenden, sondern diese Beziehung gilt für alle $S^{(l)}$. Der M zugeordnete Graph ist in diesem Sinne dann auch selbstähnlich. Man kann solche selbstähnlichen Graphen direkt und unabhängig von einem Fraktal konstruieren wie wir nun zeigen. Die beiden folgenden Konstruktionsweisen machen dabei auch deutlich, in welcher Weise man von der Invarianz des Graphen unter gewissen Transformationen sprechen kann, die hier die Rolle der Ähnlichkeitstransformationen einnehmen.

Konstruktion 3.31 Es sei ein endlicher Graph, der sogenannte Generator, vorgegeben. In der Konstruktion mit Fraktalen entspricht der Generator dem Graphen $\mathcal{G}^{(1)}$. Der Generator wird deshalb auch hier mit $\mathcal{G}^{(1)}$ bezeichnet. Nun bilden wir rekursiv $\mathcal{G}^{(N+1)}$ aus $\mathcal{G}^{(N)}$, indem wir jeden Vertex von $\mathcal{G}^{(N)}$ durch den Generator $\mathcal{G}^{(1)}$ ersetzen. Welche Vertizes des Generators dabei die in $\mathcal{G}^{(N)}$ vorhandenen Kanten tragen, ist prinzipiell frei wählbar, es wird aber bei allen Konstruktionsschritten die gleiche Wahl getroffen. Abbildung 3.8 verdeutlicht das Vorgehen am Beispiel des Generators des vorher zum Malteser Kreuz konstruierten Graphen. Bei geeigneter Wahl der Ansatzpunkte der Kanten von $\mathcal{G}^{(N)}$ in dem neuen Graphen $\mathcal{G}^{(N+1)}$ erhält man auch wieder einen Graphen mit derselben Skalierungsdimension wie bei der Konstruktion mit dem entsprechenden Fraktal. Unabhängig

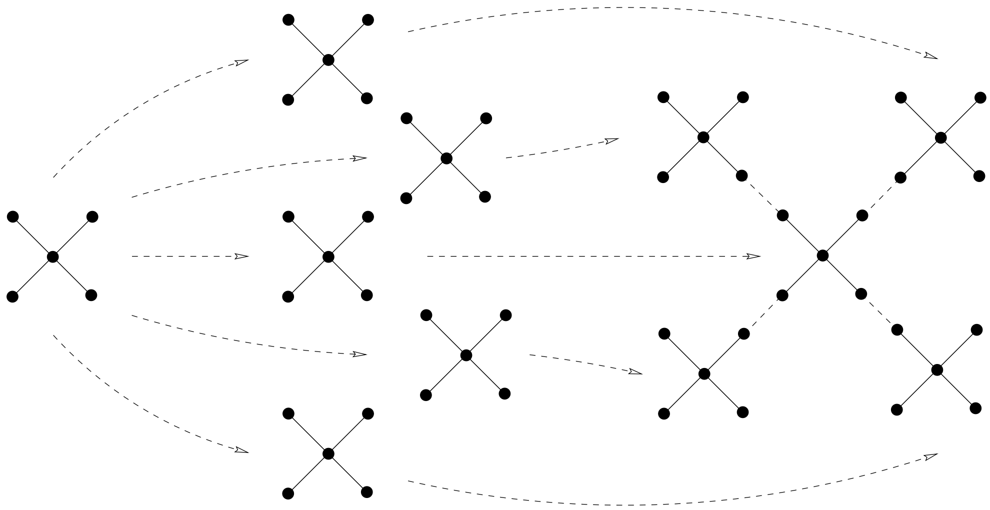


Abbildung 3.9: Veranschaulichung der Konstruktionen durch Kopieren und Verkleben am Beispiel des zum Malteser Kreuz gehörenden Generators.

von der Wahl der Ansatzpunkte der Kanten, ist der resultierende Graph $\mathcal{G}^{(\infty)}$ invariant unter der Konstruktionsabbildung des Einfügens von Generatoren für alle Vertizes. Das ist die schon angedeutete Art von Ähnlichkeitsabbildung bezüglich des Graphen.

Eine andere Sichtweise dieser Konstruktion ist die folgende:

Konstruktion 3.32 Man startet wie zuvor mit einem Generator $\mathcal{G}^{(1)}$. Dieser habe $g^{(1)}$ Vertizes. Dann nimmt man $g^{(1)}$ Kopien von $\mathcal{G}^{(1)}$ und verbindet sie durch Kanten so, wie die Vertizes im Generator verbunden sind. Dies setzt man rekursiv fort, fertigt also $g^{(1)}$ Kopien von $\mathcal{G}^{(N)}$ an und verbindet diese nach dem Vorbild von $\mathcal{G}^{(1)}$ mit Kanten zu $\mathcal{G}^{(N+1)}$. Abbildung 3.9 veranschaulicht die Konstruktion anhand des Generators, der zum Malteser Kreuz gehört. Auch hier ist die Wahl der Vertizes, die die zusätzlichen Verbindungskanten zwischen den einzelnen Kopien von $\mathcal{G}^{(N)}$ tragen, nicht eindeutig. Bei geeigneter Wahl dieser Vertizes erhält man dasselbe Ergebnis wie bei Konstruktion 3.31 mit entsprechender Auswahl.

Eine interessante Anwendung dieser Konstruktionen ist die dimensionale Approximation von n-dimensionalen Gittern. Tabelle 3.1 zeigt Generatoren, die Graphen mit einer Dimension beliebig dicht bei 2 erzeugen, und deren Eigenschaften. Die Dimensionen der erzeugten Graphen sind in Abhängigkeit des Parameters $l \in \mathbb{N}$

$$D_S^{(l)} = \frac{\ln(2l^2 + 2l + 1)}{\ln(2l + 1)},$$

und es gilt

$$\lim_{l\to\infty} D_S^{(l)} = \lim_{l\to\infty} \frac{\ln(2l^2 + 2l + 1)}{\ln(2l + 1)} = \lim_{l\to\infty} \frac{2\ln(l) + \ln(2 + \frac{2}{l} + \frac{1}{l^2})}{\ln(l) + \ln(2 + \frac{1}{l})} = 2\,.$$

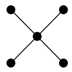
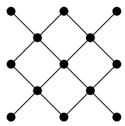
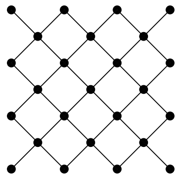
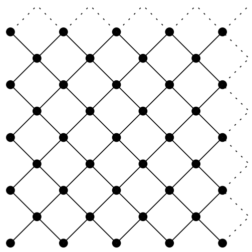
Parameter	1	2	3	l
Generator				
Card V	$2^2 + 1^2 = 5$	$3^2 + 2^2 = 13$	$4^2 + 3^2 = 25$	$(l+1)^2 + l^2$
Diagonale	$2 + 1 = 3$	$3 + 2 = 5$	$4 + 3 = 7$	$(l+1) + l$
Dimension	$\frac{\ln 5}{\ln 3}$	$\frac{\ln 13}{\ln 5}$	$\frac{\ln 25}{\ln 7}$	$\frac{\ln((l+1)^2 + l^2)}{\ln\big((l+1) + l\big)}$

Tabelle 3.1: Einige Generatoren, die andeuten, mit welchen Graphen man ein zweidimensionales Gitter dimensional approximieren kann.

Mit wachsendem l erreicht man somit Skalierungsdimensionen immer dichter an zwei.

3.3 Diskussion

Inspiriert von den Abzähldimensionen der fraktalen Geometrie sind in diesem Kapitel vier verschiedene Dimensionsbegriffe für lokal endliche, ungerichtete einfache Graphen untersucht worden. In den Tabellen 3.2 und 3.3 sind die Ergebnisse zusammengefaßt. Die Skalierungs- und Kanten-Skalierungsdimension sind „robuster" gegenüber außergewöhnlichen Graphen, d.h. sie existieren für eine größere Klasse von Graphen als die Konnektivitäts- und Kanten-Konnektivitätsdimension.

Wir haben gesehen, daß unter der Annahme der gleichmäßigen Beschränktheit des Vertexgrades die Kanten-Versionen mit den Vertex-Versionen der Dimensionsbegriffe übereinstimmen. Die Annahme der gleichmäßigen Beschränktheit des Vertexgrades klingt physikalisch plausibel, wenn man von einem in gewisser Weise homogenen Universum ausgeht. Für die Übereinstimmung von Konnektivitäts- und Skalierungsdimension hingegen konnten wir kein solches einfaches Kriterium angeben. Man sollte in einem physikalischen Modell erwarten, daß mindestens die robustere Skalierungsdimension exisitiert. Wenn sogar die Konnektivitätsdimension existiert, hat man zusammen mit dem gleichmäßig beschränkten Vertexgrad Übereinstimmung aller Dimensionsbegriffe. In dem typischen Beispiel der Git-

	D_S	$D_S^{(E)}$	D_C	$D_C^{(E)}$
höchstens wachsend unter Einfügen von Vertizes und Kanten	+ (S. 16)	+ (S. 16)	– (S. 26)	– (S. 26)
ist in einer Zusammenhangskomponente von jedem Vertex aus gleich	+ (S. 16)	+ (S. 16)	– (S. 23)	– (S. 23)
liefert auf Gittergraphen die natürliche Einbettungsdimension zurück	+ (S. 19)	+ (S. 19)	+ (S. 22)	+ (S. 22)
ist stabil unter Einfügen von Kanten zwischen Vertizes mit gleichmäßig beschränktem Abstand	+ (S. 19)	(+) (S. 34)	– (S. 26)	– (S. 26)
Untersuchung geeigneter Teilfolgen der Bestimmungsfolge reicht aus	+ (S. 21)	+ (S. 21)	– (S. 31)	– (S. 31)
ist additiv unter Bildung des kartesischen Produkts von Graphen	(+) (S. 37)	(+) (S. 37)	(+) (S. 38)	(+) (S. 38)

Tabelle 3.2: Zusammenfassung der Eigenschaften der verschiedenen Dimensionsbegriffe. „+“ bedeutet: Eigenschaft ist vorhanden, „–“ bedeutet: Eigenschaft ist im allgemeinen nicht vorhanden. Die Klammern deuten an, daß die Ergebnisse unter zusätzlichen Voraussetzungen erzielt wurden. Die genauen Aussagen und Voraussetzungen findet man im Text an den durch die Seitenzahlen bezeichneten Stellen.

tergraphen ist dies ebenso der Fall wie bei den vorgestellten konischen Graphen. Bei dem zu dem Malteser Kreuz als Beispiel eines selbstähnlichen Graphen konstruierten Graphen (Abbildung 3.7) existieren hingegen die Konnektivitäts- und Kanten-Konnektivitätsdimension nicht von allen Vertizes aus.

Aus der Anschauung heraus würde man einem endlichen Stück eines Graphen bzw. einem endlichen Graphen selbst gern schon eine Dimension ungleich Null zuordnen. Zu diesem Zweck sind die hier untersuchten Begriffe jedoch nicht geeignet. Wir waren gezwungen, die Dimension eines endlichen Graphen bzw. einer endlichen Zusammenhangskomponente eines Graphen im Falle der Skalierungsdimension und Kanten-Skalierungsdimension zu Null festzusetzen. Aus Konsistenzgründen hatten wir dann auch die Konnektivitätsdimension und Kanten-Konnektivitätsdimension als Null festgesetzt. Die Angabe einer Dimension für

$\underline{D}_C(n_i),\ \overline{D}_C(n_i),\ \underline{D}_C^{(E)}(n_i),\ \overline{D}_C^{(E)}(n_i) \geq 1$ oder $= 0$	
$\underline{D}_S(n_i),\ \overline{D}_S(n_i),\ \underline{D}_S^{(E)}(n_i),\ \overline{D}_S^{(E)}(n_i) \geq 1$ oder $= 0$	
$\underline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C(n_i) =: D \quad \Rightarrow \quad \underline{D}_S(n_i) = \overline{D}_S(n_i) = D$	(S. 26)
$\underline{D}_C^{(E)}(n_i) = \overline{D}_C^{(E)}(n_i) =: D \quad \Rightarrow \quad \underline{D}_S^{(E)}(n_i) = \overline{D}_S^{(E)}(n_i) = D$	(S. 26)
Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.	(S. 28)
$\overline{D}_C(n_i) \leq \overline{D}_S(n_i) + 1\,, \quad \overline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq \overline{D}_S^{(E)}(n_i) + 1$	(S. 31)
$\underline{D}_C(n_i) \leq \underline{D}_S(n_i)\,, \quad \underline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq \underline{D}_S^{(E)}(n_i)$	(S. 31)
$\underline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C(n_i) \quad \nRightarrow \quad \underline{D}_C^{(E)}(n_i) = \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$	(S. 34)
$\underline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C(n_i) \quad \nLeftarrow \quad \underline{D}_C^{(E)}(n_i) = \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$	(S. 35)
$\underline{D}_S(n_i) = \overline{D}_S(n_i) \quad \nRightarrow \quad \underline{D}_S^{(E)}(n_i) = \overline{D}_S^{(E)}(n_i)$	(S. 35)
$\underline{D}_S(n_i) = \overline{D}_S(n_i) \quad \nLeftarrow \quad \underline{D}_S^{(E)}(n_i) = \overline{D}_S^{(E)}(n_i)$	(S. 36)
$\underline{D}_C(n_i) \leq \underline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq 2\overline{D}_C(n_i) - 1$	(S. 31)
$\overline{D}_C(n_i) \leq \overline{D}_C^{(E)}(n_i) \leq 2\overline{D}_C(n_i) - 1$	(S. 31)
$\underline{D}_S(n_i) \leq \underline{D}_S^{(E)}(n_i) \leq 2\underline{D}_S(n_i)$	(S. 32)
$\overline{D}_S(n_i) \leq \overline{D}_S^{(E)}(n_i) \leq 2\overline{D}_S(n_i)$	(S. 32)
falls der Vertexgrad gleichmäßig beschränkt ist, gilt	
$\underline{D}_C(n_i) = \underline{D}_C^{(E)}(n_i)\,, \quad \overline{D}_C(n_i) = \overline{D}_C^{(E)}(n_i)$	(S. 34)
$\underline{D}_S(n_i) = \underline{D}_S^{(E)}(n_i)\,, \quad \overline{D}_S(n_i) = \overline{D}_S^{(E)}(n_i)$	(S. 34)

Tabelle 3.3: Zusammenfassung der Verhältnisse der Dimensionsbegriffe zueinander. Die genauen Voraussetzungen und Beweise findet man auf den angegebenen Seiten. Die Eigenschaften in den ersten zwei Zeilen folgen direkt aus den Definitionen.

endliche Graphen erfordert also eine neue Begriffsbildung. Wenn man aus prinzipiellen Gründen Einbettungsräume nicht verwenden will, bleiben als Daten nur die Nachbarschaftsstruktur der Vertizes des Graphen. Diese kann man auf verschiedene Weise analysieren. So kann man etwa die maximale Anzahl der disjunkten Wege einer fixierten Länge, die eine Schleife bilden, untersuchen oder wie bei den hier thematisierten globalen Dimensionsbegriffen die Größe von Umgebungen betrachten. Nach dem bisherigen Stand unserer Kenntnis scheint auch für endliche Graphen bzw. endliche Stücke von Graphen die Analyse der Umgebungsgrößen das fruchtbarste Konzept zu sein. Allerdings sind die Zusammenhänge schwieriger als es auf den ersten Blick erscheint. Man beweist durch Induktion leicht, daß die Umgebungsgrößen in einem n-dimensionalen kubischen Gitter

$$u_k = 2k + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \tbinom{n-1}{j} 2^j \sum_{i_j=0}^{k-1} \sum_{i_{j-1}=0}^{i_j-1} \cdots \sum_{i_1=0}^{i_2-1} (2i_1 + 1) \tag{3.6}$$

sind. Das heißt, die Umgebungsgrößen folgen nicht direkt dem asymptotisch erwarteten Verhalten $u_k(n_i) \sim k^n$. Da man aber auch bei endlichen Graphen die endlichen Ausschnitte von n-dimensionalen Gittern als die typischen n-dimensionalen Objekte ansieht, muß man verlangen, daß auf diesen speziellen endlichen Graphen der zu bildende Dimensionsbegriff die Dimension n liefert. Man müßte also eine Definition angeben, die auf der jeweiligen Skala k aus dem komplizierten Ausdruck (3.6) für u_k die richtige Dimension n extrahiert und für beliebige Graphen auch plausible Werte liefert. Insbesondere sollten die Dimensionen endlicher Ausschnitte nicht-kubischer Gitter ebenfalls richtig erkannt werden.

Man darf auch nicht aus den Augen verlieren, daß unklar ist, nach welchen Kriterien ein auf endlicher Information beruhender Dimensionsbegriff bewertet werden muß. Die Übereinstimmung mit der Einbettungsdimension von Gittergraphen ist selbstverständlich. Erwartet man darüber hinaus aber auch geeignete Stabilitätsaussagen oder die Konvergenz gegen die hier untersuchten Begriffe, wenn man immer größer werdende Skalen betrachtet? In diesem Zusammenhang müßte dann auch geklärt werden, inwiefern Begriffe, die nicht auf dem Abzählen von Umgebungsgrößen beruhen, interessante Einblicke erlauben und welche Begriffe dies tun.

Kapitel 4

Differentialgeometrie auf abzählbaren Mengen

In diesem Kapitel werden drei verschiedene Ansätze zur Übertragung von Begriffen aus der Differentialgeometrie auf abzählbare Mengen bzw. Graphen dargestellt. Wir bezeichnen die dabei entstehenden mathematischen Strukturen als Differentialkalküle und vermeiden in diesem Zusammenhang andere Begriffe wie beispielsweise „Differentialalgebra“ oder „differenzierbare Struktur“, die eher mit Eigenschaften assoziiert werden, die hier nicht immer gemeint sind.

Die drei vorgestellten Ansätze unterscheiden sich deutlich und führen dennoch zu Differentialkalkülen mit überraschend großen Ähnlichkeiten. Die Auswahl der mathematischen Strukturen zur Konstruktion eines Differentialkalküls ist also durch die erwarteten Eigenschaften schon stark eingeschränkt. In allen drei Fällen ist die Konstruktion des Differentialkalküls für eine abzählbare Menge oder einen Graphen eine Übertragung gewisser Teile der klassischen Differentialgeometrie und zum Teil auch der zyklischen Kohomologie. Dieser gemeinsame Ursprung ist sicherlich auch ein Grund für die Ähnlichkeit der Kalküle.

Die Kenntnis der grundlegenden Begriffe der klassischen Differentialgeometrie ist aufgrund der vielen Parallelen zu den im folgenden entwickelten Differentialkalkülen für das Verständnis hilfreich. Wir verzichten in dieser Arbeit jedoch auf eine Zusammenfassung dieser Begriffe und verweisen auf die umfangreiche Literatur zur Differentialgeometrie. Eine gute Einführung findet man in der Monographie von Jänich [Jän] und eine umfassende Darstellung in der Monographie von Greub et al. [GHV].

4.1 Connes' nichtkommutative Geometrie auf abzählbaren Mengen

Die nichtkommutative Geometrie hat ihren Ursprung in der Beobachtung von Gel'fand und Naimark, daß die Kategorie der lokalkompakten Hausdorffräume dual zur Kategorie der kommutativen C^*-Algebren ist.

Satz 4.1 (Gel'fand und Naimark) *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative (komplexe) C^*-Algebra. Dann gibt es einen lokalkompakten Hausdorffraum X, so daß $\mathcal{A}$ zu der Algebra der komplexwertigen stetigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden*[1]*, isomorph ist. X ist genau dann kompakt, wenn $\mathcal{A}$ unital ist.*

Im wesentlichen bedeutet dies, daß die Untersuchung lokalkompakter Hausdorffräume und kommutativer C^*-Algebren äquivalent ist. Den Beweis findet man etwa in [Nai]. In der nichtkommutativen Geometrie studiert man nun nicht nur *kommutative* sondern auch im allgemeinen *nicht*kommutative C^*-Algebren.

In diesem Abschnitt wird zunächst von dem allgemeinen Ansatz von Alain Connes für beliebige unitale, assoziative C^*-Algebren ausgegangen und dann der Spezialfall der Algebra der Funktionen auf einer abzählbaren Menge V mit Werten in $\mathbb{C}$ diskutiert. Darstellungen des allgemeinen Ansatzes findet man in [Con] und [Coq]. Für den Spezialfall der Funktionenalgebra auf abzählbaren Mengen folgen wir der Darstellung in [DMH].
Durch das Gel'fand-Naimark Theorem ist man bei diesem Zugang schon auf die *komplex*wertigen Funktionen festgelegt. Bei den Ansätzen in den Abschnitten 4.2 und 4.3 ist dies nicht der Fall. Die C^*-Struktur spielt in dem Fall abzählbarer Mengen bei keinem der vorgestellten Ansätze eine Rolle und wird deshalb im folgenden nicht mehr erwähnt. Weiterhin ist die Algebra der Funktionen auf V zwar selbst noch kommutativ, die Kommutativität mit Differentialformen wird aber nicht mehr gefordert und ist, wie wir unten zeigen, auch nicht erfüllt. In diesem Sinn ist die betrachtete Situation nur schwach nichtkommutativ.

Das zentrale Objekt der nichtkommutativen Geometrie im Sinne Connes ist die universelle graduierte Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}$ über einer assoziativen komplexen Algebra $\mathcal{A}$. Im folgenden wird auch vorausgesetzt, daß $\mathcal{A}$ unital ist. Es gibt mehrere äquivalente Definitionen von $\Omega\mathcal{A}$, die man beispielsweise bei Coqueraux [Coq], Connes selbst [Con] oder in der Dissertation von Walze [Wal] findet. Die folgende Definition folgt im wesentlichen der ersten Version in [Coq].

Definition 4.2 (Universelle Differentialalgebra) *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale assoziative Algebra über $\mathbb{C}$. Zu jedem Element $a \in \mathcal{A}$ assoziieren wir ein Symbol da. Sei*

[1] Das Verschwinden einer Funktion f im Unendlichen ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset X$ gibt, so daß $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X \backslash K$ ist.

$\Omega\mathcal{A}$ die frei von den Symbolen a und da, $a \in \mathcal{A}$, erzeugte Algebra geteilt durch die Relationen

(i) $a \cdot_f b = (ab)$,

(ii) $\lambda a +_f b = (\lambda a + b)$,

(iii) $(da) \cdot_f b + a \cdot_f db = d(ab)$,

(iv) $\lambda \cdot_f da +_f db = d(\lambda a + b)$ *und*

(v) $de = 0$,

wobei $\cdot_f$ und $+_f$ die Multiplikation und Addition in der frei erzeugten Algebra bedeuten und e die Einheit in $\mathcal{A}$ ist. Dann lassen sich alle Elemente aus $\Omega\mathcal{A}$ als Summen von Monomen der Form $a_0 da_1 \dots da_r$ schreiben. Schließlich wird d durch die Vorschrift

$$a_0 da_1 \dots da_n \mapsto da_0 da_1 \dots da_n$$

zu einem Operator $d : \Omega\mathcal{A} \to \Omega\mathcal{A}$ erweitert. Das Paar $(\Omega\mathcal{A}, d)$ heißt universelle Differentialalgebra *über $\mathcal{A}$.*

Bei dieser Konstruktion wird e zur Einheit in ganz $\Omega\mathcal{A}$, da

$$\begin{aligned} &e \cdot a_0 da_1 \dots da_n = a_0 da_1 \dots da_n \,, \\ &a_0 da_1 \dots da_n \cdot e = a_0 da_1 \dots da_{n-1}(-(de)a_n + d(a_n e)) = a_0 da_1 \dots da_n \end{aligned}$$

gilt. Die universelle Differentialalgebra ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Differentialalgebra im Sinne der folgenden Definition.

Definition 4.3 ($\mathbb{N}_0$-graduierte Differentialalgebra) *Das Paar (Ω, d) ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Differentialalgebra, wenn*

(i) $\Omega = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n$,

(ii) $\omega \cdot \eta \in \Omega^{r+s}$ *für alle* $\omega \in \Omega^r$, $\eta \in \Omega^s$,

(iii) $d(\omega\eta) = d\omega\, \eta + (-1)^r \omega d\eta$ *für alle* $\omega \in \Omega^r$, $\eta \in \Omega^s$ *und*

(iv) $d^2 = 0$.

Lemma 4.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale, assoziative Algebra. Dann ist die universelle Differentialalgebra ($\Omega\mathcal{A}$, d) zu $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Differentialalgebra.*

Beweis. Die Eigenschaften (i), (ii) und (iv) folgen sofort aus der Definition 4.2 der universellen Differentialalgebra ($\Omega\mathcal{A}$, d). Für Eigenschaft (iii) genügt es zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} &d(a_0 da_1 \dots da_r \cdot b_0 db_1 \dots db_s) \\ &\qquad = da_0 da_1 \dots da_r b_0 db_1 \dots db_s + (-1)^r a_0 da_1 \dots da_r db_0 db_1 \dots db_s \end{aligned}$$

für beliebige Monome $a_0 da_1 \dots da_r$ und $b_0 db_1 \dots db_s$ gilt, da alle Elemente von $\Omega\mathcal{A}$ Linearkombinationen solcher Monome sind. Man erhält direkt aus den Definitionen

$$\begin{aligned}
&d(a_0 da_1 \dots da_r \cdot b_0 db_1 \dots db_s) \\
&= d(-a_0 da_1 \dots a_r db_0 db_1 \dots db_s + a_0 da_1 \dots d(a_r b_0) db_1 \dots db_s) \\
&= d\big((-1)^r (a_0 a_1) da_2 \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{r-i} a_0 da_1 \dots d(a_i a_{i+1}) \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + a_0 da_1 \dots d(a_r b_0) db_1 \dots db_s\big)\,.
\end{aligned}$$

Dabei entsteht die Summe beim Durchtauschen des Elements ohne d mit Hilfe der Leibnizregel. Dann kann man d auf alle Monome anwenden und das Element ohne d im ersten Term wieder zurückschieben.

$$\begin{aligned}
&= (-1)^r d(a_0 a_1) da_2 \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{r-i} da_0 da_1 \dots d(a_i a_{i+1}) \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + da_0 da_1 \dots d(a_r b_0) db_1 \dots db_s \\
&= (-1)^r a_0 da_1 \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{r+i-1} da_0 da_1 \dots d(a_i a_{i+1}) \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad - da_0 da_1 \dots d(a_r b_0) db_1 \dots db_s \\
&\quad + (-1)^{2r} da_0 da_1 \dots da_r b_0 db_1 \dots db_s \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{r-i} da_0 da_1 \dots d(a_i a_{i+1}) \dots da_r db_0 \dots db_s \\
&\quad + da_0 da_1 \dots d(a_r b_0) db_1 \dots db_s\,.
\end{aligned}$$

Die Summen und die Terme, die $d(a_r b_0)$ enthalten, heben sich gegenseitig weg und man erhält

$$= da_0 da_1 \dots da_r b_0 db_1 \dots db_s + (-1)^r a_0 da_1 \dots da_r db_0 \dots db_s\,.$$

□

Gibt es einen Algebrahomomorphismus von $\mathcal{A}$ in eine Differentialalgebra (B, δ), so kann (B, δ) durch einen Differentialalgebrahomomorphismus aus $(\Omega\mathcal{A}, d)$ gewonnen werden. In diesem Sinn ist der Name *universelle* Differentialalgebra für $(\Omega\mathcal{A}, d)$ gerechtfertigt. Näheres dazu findet man in [Kas].

Jetzt wenden wir uns dem Spezialfall der Algebra der Funktionen auf einer abzählbaren Menge zu. Die Darstellung folgt im wesentlichen der von Dimakis und Müller-Hoissen in [DMH]. Sei $V = \{n_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge, etwa die Vertexmenge eines Graphen. Weiterhin sei $\mathcal{A}_V$ die Algebra der Funktionen $V \to \mathbb{C}$. Die Addition und Multiplikation in $\mathcal{A}_V$ ist dabei durch punktweise Addition und Multiplikation erklärt. Die Algebra $\mathcal{A}_V$ wird über $\mathbb{C}$ von der Menge der elementaren Indikatorfunktionen $\{e_i : e_i(n_j) = \delta_{ij}\}$ aufgespannt. Im Fall einer unendlichen Menge V sind die Elemente von $\mathcal{A}_V$, die keinen endlichen Träger haben, jedoch nicht *endlich* erzeugt. Vielmehr braucht man im allgemeinen unendliche Summen von Funktionen e_i, um eine Funktion $f \in \mathcal{A}_V$ zu erhalten. Dies bereitet zunächst keine Probleme, da die Konvergenz solcher Summen punktweise verstanden werden kann, d. h. für alle n_j und alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|(\sum_{i=1}^n f_i e_i)(n_j) - f(n_j)| < \epsilon$ gilt. Denn für $n > j$ ist $(\sum_{i=1}^n f_i e_i)(n_j) = f_j = f(n_j)$, also $|(\sum_{i=1}^n f_i e_i)(n_j) - f(n_j)| = 0 < \epsilon$. Bildet man jedoch die Symbole de_i, so bricht diese Argumentation zusammen, da die abstrakten Symbole de_i keine solche punktweise Topologie tragen und somit unendliche Summen dieser Symbole nicht definiert sind. Im allgemeinen Ansatz von Alain Connes geht man deshalb von der abstrakten Algebra $\Omega\mathcal{A}$ zu einer Darstellung der Elemente von $\Omega\mathcal{A}$ als beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ über. Dann können die Topologien von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ genutzt werden, um die Konvergenz unendlicher Summen zu definieren.
Im folgenden wird ein anderer Weg gewählt. Es wird zunächst nur der Fall einer *endlichen* Menge V behandelt und später gezeigt, daß eine physikalisch motivierte Annahme über die Differentialalgebra auch die rein algebraische Behandlung für *unendliches* V erlaubt.
Sei nun V endlich und $I = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq N\}$. Die allgemeinen Relationen der universellen Differentialalgebra lassen sich in dem hier betrachteten Spezialfall weiter konkretisieren. Zunächst erhält man Relationen für die Elementarfunktionen e_i.

Lemma 4.5 (Relationen der e_i)

(i) $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$,

(ii) $\sum_{i \in I} e_i = e$, *wobei e die Einheit in $\mathcal{A}_V$ ist,*

(iii) $e_i de_j = -de_i\, e_j + \delta_{ij} de_i$ *und*

(iv) $d^2 = 0$.

Dann läßt sich mit Hilfe der Symbole

$$e_{ij} := \begin{cases} e_i de_j & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad e_{i_0 \dots i_r} := e_{i_0 i_1} e_{i_1 i_2} \dots e_{i_{r-1} i_r}$$

in einfacher Weise eine Basis der universellen Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}_V$ angeben.

Lemma 4.6 (Eigenschaften von $e_{i_0\dots i_r}$)

(i) $e_{i_0\dots i_r} = \begin{cases} e_{i_0}de_{i_1}de_{i_2}\dots de_{i_r} & \textit{falls } i_j \neq i_{j+1}\,, \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$

(ii) $e_{i_0 i_1\dots i_r} \cdot e_{j_0 j_1\dots j_s} = \delta_{i_r j_0} e_{i_0\dots i_r j_1\dots j_s}$,

(iii) *die Menge* $\{e_{i_0\dots i_r} : i_0,\dots,i_r \in I, i_{j+1} \neq i_j\}$, $r \in \mathbb{N}_0$, *ist eine Basis von* $\Omega\mathcal{A}_V$ *als direkter Summe von* $\mathbb{C}$*-Vektorräumen und*

(iv) *die Mengen* $\{ke_{i_0 i_1\dots i_r} : k \in \mathbb{C}\}$ *sind* $\mathcal{A}_V$*-Bimodule in* $\Omega\mathcal{A}_V$.

Beweis.

(i) Wir führen eine Induktion nach r, dem Grad von $e_{i_0\dots i_r}$, durch. Für $r = 1$ ist definitionsgemäß $e_{i_0 i_1} = e_{i_0}de_{i_1}$. Sei nun die Behauptung richtig für r. Dann gilt

$$e_{i_0\dots i_{r+1}} = e_{i_0}de_{i_1} \cdot e_{i_1}de_{i_2}\dots de_{i_{r+1}}\,.$$

Mit der Assoziativität der Multiplikation und

$$\begin{aligned} e_{i_0}(de_{i_1} \cdot e_{i_1}) &= e_{i_0}(-e_{i_1}de_{i_1} + de_{i_1}) \\ &= \begin{cases} e_{i_0}de_{i_1} & \text{falls } i_0 \neq i_1\,, \\ -e_{i_1}de_{i_1} + e_{i_1}de_{i_1} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

(ii) Man verwendet die Leibnizregel Definition 4.2 (iii) und erhält

$$\begin{aligned} &e_{i_0 i_1\dots i_r} \cdot e_{j_0 j_1\dots j_s} = e_{i_0}de_{i_1}\dots de_{i_r} \cdot e_{j_0}de_{j_1}\dots de_{j_s} \\ &= e_{i_0}de_{i_1}\dots de_{i_{r-1}}(-e_{i_r}de_{j_0} + \delta_{i_r j_0}de_{i_r})de_{j_1}\dots de_{j_s} \\ &= (-1)^r e_{i_0}e_{i_1}de_{i_2}\dots de_{i_r}de_{j_0}\dots de_{j_s} + \delta_{i_r j_0}e_{i_0}de_{i_1}\dots de_{i_r}de_{j_1}\dots de_{j_s} \\ &= \delta_{i_r j_0}e_{i_0\dots i_r j_1\dots j_s} \end{aligned}$$

(iii) $\Omega\mathcal{A}_V$ ist die direkte Summe aller $\Omega^r\mathcal{A}_V$. Also genügt es zu zeigen, daß die Mengen $B_r := \{e_{i_0\dots i_r} : i_0,\dots,i_r \in I, i_j \neq i_{j+1}\}$ für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $\Omega^r\mathcal{A}_V$ sind. Zunächst zeigt man, daß B_r den Vektorraum $\Omega^r\mathcal{A}_V$ über $\mathbb{C}$ aufspannt. Sei dazu $\omega \in \Omega^r\mathcal{A}_V$ beliebig. Dann ist $\omega = \omega_0 d\omega_1\dots d\omega_r$ mit $\omega_0,\dots,\omega_r \in \mathcal{A}_V$. Damit folgt

$$\omega = \sum \omega_{0i_0}e_{i_0}d\omega_1\dots d\omega_r\,.$$

Nun ist $\{e_{i_1} : i_1 \in I, i_1 \neq i_0\} \cup \{e\}$ für jedes i_0 eine Basis von $\mathcal{A}_V$. Also erhält man

$$\omega_1 = \sum_{\substack{i_1\in I \\ i_1\neq i_0}} \omega_{1i_1}e_{i_1} + \omega_{1e}e$$

$$\Rightarrow \quad d\omega = \sum_{\substack{i_1 \in I \\ i_1 \neq i_0}} \omega_{1 i_1} e_{i_1} \,.$$

Damit ergibt sich

$$\omega = \sum_{i_0 \in I} \sum_{\substack{i_1 \in I \\ i_1 \neq i_0}} \omega_{0 i_0} \omega_{1 i_1} e_{i_0} de_{i_1} d\omega_2 \ldots d\omega_r$$

und nach r-facher Wiederholung des Prozesses

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\substack{i_0 \ldots i_r \in I \\ i_{j+1} \neq i_j}} \omega_{0 i_0} \omega_{1 i_1} \ldots \omega_{r i_r} e_{i_0} de_{i_1} \ldots de_{i_r} \\ &\overset{(i)}{=} \sum_{i_0 \ldots i_r \in I} \omega_{0 i_0} \ldots \omega_{r i_r} e_{i_0 \ldots i_r} \,. \end{aligned}$$

B_r erzeugt demnach $\Omega^r \mathcal{A}_V$. Den Beweis für die lineare Unabhängigkeit von B_r skizzieren wir nur kurz. Man führt eine Induktion nach dem Grad r der Formen durch. Für $r = 0$ folgt aus $\sum_{i \in I} k_i e_i = 0$ durch Multiplikation mit e_j von rechts und Auswertung an der Stelle n_j sofort $k_j = 0$ für alle $j \in I$. Gilt die Behauptung für r-Formen, so folgt aus

$$\sum_{\substack{i_0, \ldots, i_{r+1} \in I \\ i_{j+1} \neq i_j}} k_{i_0 \ldots i_{r+1}} e_{i_0 \ldots i_{r+1}} = 0$$

durch Rechtmultiplikation mit e_j

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_0, \ldots, i_r \in I \\ i_{j+1} \neq i_j}} k_{i_0 \ldots i_r j} e_{i_0} de_{i_1} \ldots de_{i_r} de_j = 0 \\ \Rightarrow \quad &\Big(\sum_{\substack{i_0, \ldots, i_r \in I \\ i_{j+1} \neq i_j}} k_{i_0 \ldots i_r j} e_{i_0} de_{i_1} \ldots de_{i_r} \Big) de_j = 0 \,. \end{aligned}$$

Überzeugt man sich nun davon, daß diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn die Klammer schon Null ist, folgt nach Induktionsannahme $k_{i_0 \ldots i_r j} = 0$ für alle $i_0, \ldots, i_r, j \in I$ und damit die lineare Unabhängigkeit von B_r.

(iv) Die Mengen $\{k e_{i_1 i_2 \ldots i_r} : k \in \mathbb{C}\}$ sind offensichtlich lineare Unterräume von $\Omega \mathcal{A}_V$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Also muß nur gezeigt werden, daß sie unter Links- und Rechtsmultiplikation stabil sind.

$$\begin{aligned} f \cdot k e_{i_0 i_1 \ldots i_r} &= k \sum_{i \in I} f_i e_i \cdot e_{i_0 i_1 \ldots i_r} = k f_{i_0} e_{i_0 i_1 \ldots i_r} \\ k e_{i_0 i_1 \ldots i_r} \cdot f &= k \sum_{i \in I} f_i e_{i_0 i_1 \ldots i_r} \cdot e_i = k f_{i_r} e_{i_0 i_1 \ldots i_r} \end{aligned}$$

□

Im folgenden setzen wir stets $i_j \neq i_{j+1}$ voraus, wenn wir $e_{i_0\dots i_r}$ schreiben.

Auch die Wirkung von d auf die $e_{i_0 i_1\dots i_r}$ läßt sich explizit angeben und darüber die Wirkung von d auf beliebige Elemente $\psi = \sum_{i_0,\dots,i_r\in I}\psi_{i_0 i_1\dots i_r}e_{i_0 i_1\dots i_r}$ aus $\Omega\mathcal{A}_V$ berechnen.

Lemma 4.7

(i) $de_{i_0 i_1\dots i_r} = \sum_{j\in I}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k e_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_r}$,

(ii) $d\psi = \sum_{i_0\dots i_{r+1}\in I} e_{i_0\dots i_{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k\psi_{i_0\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_{r+1}}$.

Beweis. Beide Eigenschaften erhält man mit der Leibnizregel Definition 4.2 (iii).

(i) Induktion nach r, dem Grad von $e_{i_0 i_1\dots i_r}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}(e_{ji}-e_{ij}) &= \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}(e_j de_i + de_i e_j) = de_i - e_i de_i + de_i - de_i e_i\\ &= 2de_i - e_i de_i + e_i de_i - de_i = de_i\,.\end{aligned}$$

Sei nun die Behauptung für $e_{i_0\dots i_r}$ richtig. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}d(e_{i_0 i_1\dots i_{r+1}}) &= de_{i_0} d(e_{i_1} de_{i_2}\dots de_{i_r+1})\\ &= \sum_{j\in I}(e_{ji_0}-e_{i_0 j})\sum_{l\in I}\sum_{k=1}^{r+2}(-1)^{k-1}e_{i_1\dots i_{k-1} l i_k\dots i_{r+1}}\\ &= \sum_{j\in I}\sum_{l\in I}\delta_{i_0 l}e_{j i_0 i_1\dots i_{r+1}} - \sum_{j\in I}\sum_{l\in I}\delta_{jl}e_{i_0 j i_1\dots i_{r+1}}\\ &\quad - \sum_{j\in I}\sum_{l\in I}\sum_{k=2}^{r+2}\delta_{j i_1}(-1)^{k-1}e_{i_0 i_1\dots i_{k-1} l i_k\dots i_{r+1}}\\ &= \sum_{j\in I}\sum_{k=0}^{r+2}(-1)^k e_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_{r+1}}\end{aligned}$$

(ii) Unter Verwendung von (i) rechnet man direkt nach, daß

$$\begin{aligned}d\psi &= \sum_{i_0,\dots,i_r\in I}\psi_{i_0\dots i_r}de_{i_0\dots i_r} = \sum_{i_0,\dots,i_r\in I}\psi_{i_0\dots i_r}\sum_{j\in I}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^r e_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_r}\\ &= \sum_{i_0,\dots,i_r,j\in I}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^r\psi_{i_0\dots i_r}e_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_r}\end{aligned}$$

gilt. Durch Vertauschen der Summationen und Umbenennung von j in i_k und i_m in i_{m+1} für $m \geq k$ und Zurücktauschen der Summation erhält man dann

$$d\psi = \sum_{i_0,\ldots,i_{r+1}\in I} e_{i_0\ldots i_{r+1}} \sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k \psi_{i_0\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_{r+1}} . \qquad \square$$

Bisher wurde nur die universelle Differentialalgebra über $\mathcal{A}_V \ni f : V \to \mathbb{C}$ für endliche Mengen V betrachtet. Dies ist die größte Algebra über $\mathcal{A}_V$, die alle Forderungen an eine Differentialalgebra erfüllt. Es gibt im allgemeinen auch kleinere Differentialalgebren über $\mathcal{A}_V$. Sie entstehen aus $\Omega\mathcal{A}_V$ durch Quotientenbildung nach zweiseitigen Idealen.
Sei nun $\mathcal{I}$ das von $\{e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{i_k j_k}\}$ erzeugte zweiseitige Ideal in $\Omega\mathcal{A}_V$. $\Omega\mathcal{A}_V/\mathcal{I}$ ist dann zunächst keine Differentialalgebra, da $\mathcal{I}$ nicht stabil unter der Wirkung von d ist, d. h. $d\mathcal{I} \not\subset \mathcal{I}$. Um wieder eine Differentialalgebra zu erhalten, muß man $\mathcal{I}$ zu dem *Differentialideal* $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I} \cup d\mathcal{I}$ erweitern. Wegen $d^2 = 0$ ist $d\tilde{\mathcal{I}} = d\mathcal{I} + d^2\mathcal{I} = d\mathcal{I} \subset \tilde{\mathcal{I}}$, also $\tilde{\mathcal{I}}$ stabil unter d und damit $\Omega\mathcal{A}_V/\tilde{\mathcal{I}}$ wieder eine Differentialalgebra. Im wesentlichen heißt das, daß in der Kategorie der Differentialalgebren die Differentialideale die geeigneten Objekte sind, die die Rolle der Ideale in der Kategorie der Algebren übernehmen.
Wir verwenden im folgenden auch in den reduzierten Differentialalgebren $\Omega\mathcal{A}_V/\tilde{\mathcal{I}}$ das Symbol $e_{i_0 i_1\ldots i_r}$ für die Äquivalenzklasse $[e_{i_0 i_1\ldots i_r}]$. Für $e_{i_0 i_1\ldots i_r} \in \tilde{\mathcal{I}}$ schreiben wir $e_{i_0 i_1\ldots i_r} = 0$. Anschaulich entspricht das Teilen durch $\tilde{\mathcal{I}}$ also dem Nullsetzen der Elemente von $\tilde{\mathcal{I}}$.

Nachdem die algebraische Konstruktion von $\Omega\mathcal{A}_V$ erläutert wurde, ermöglichen die speziellen Elemente $e_{i_0 i_1\ldots i_r}$ und ihre oben angegebenen Eigenschaften nun eine konkrete geometrische Interpretation. Diese in gewissem Sinn sogar physikalische Interpretation soll nun erläutert werden.

Die Differentialformen nullten und ersten Grades, $\Omega^0\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_V$ und $\Omega^1\mathcal{A}_V$, definieren einen Graphen mit Vertexmenge $V = \{e_i : i \in I\}$ und Kantenmenge $E = \{e_{ij} : (i,j) \in J\}$. Dabei sei $e_{ij} \in E$ im Sinne des Graphen genau dann, wenn $e_{ij} \neq 0$ im algebraischen Sinn gilt. Auf diese Weise erhält man einen Digraphen, den man physikalisch gesprochen als Netzwerk bezeichnen würde. Der universellen Differentialalgebra entspricht in diesem Bild der Simplex, also der maximal vernetzte Graph. Nimmt man diese Korrespondenz ernst, so muß man umgekehrt argumentieren, daß die konstruierte Differentialalgebra der zu einem gegebenen Graphen mit den Vertizes V und den Kanten E gehörende Differentialkalkül ist.

Bis jetzt haben wir nur die Elemente ersten Grades betrachtet und interpretiert. Die Multiplikationsregel für die e_{ij} legt es nahe, Elemente von $\Omega\mathcal{A}_V$ höheren Grades als Wege zu interpretieren. $e_{i_0 i_1\ldots i_r}$ wäre dementsprechend der Weg von n_{i_0} nach n_{i_1} usw. bis nach n_{i_r}. Die Multiplikation zweier Elemente entspräche der Verkettung von Wegen und die Weglänge wäre der Grad des Elements $e_{i_0\ldots i_r}$

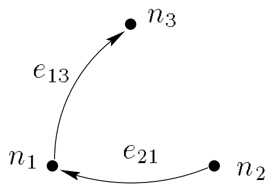


Abbildung 4.1: Beispiel eines Graphen, bei dem zusätzliche höhere Formen Null werden.

von $\Omega^r\mathcal{A}_V$. Weiterhin ist $e_{i_0i_1\ldots i_r} = 0$, wenn eine der für den entsprechenden Weg benötigten Kanten fehlt. Soweit erscheint dies als eine sinnvolle Interpretation für Differentialformen höheren Grades.
Die Umkehrung der letzten Aussage gilt jedoch nicht. Wenn $e_{i_0i_1\ldots i_r} = 0$ ist, folgt nicht, daß eine der Kanten $e_{i_ji_{j+1}}$ fehlen muß. Dies liegt daran, daß man durch $\tilde{\mathcal{I}}$ statt durch $\mathcal{I}$ teilen muß, um die Struktur einer Differentialalgebra zu erhalten. Das folgende Beispiel verdeutlich das Problem.

Beispiel 4.8 Sei $V = \{n_1, n_2, n_3\}$, also $I = \{1, 2, 3\}$ und $E = \{e_{21}, e_{13}\}$. Dann hat man den in Abbildung 4.1 dargestellten Graphen und es gilt

$$0 = de_{23} = \sum_{j\in I} e_{j23} - e_{2j3} + e_{23j} = -e_{213}\,.$$

Also ist $e_{213} = 0$, obwohl $e_{21} \neq 0$ und $e_{13} \neq 0$ gilt. □

Es gibt demnach keine eineindeutige Zuordnung zwischen den Formen höheren Grades und den Wegen im Graphen. Andere sinnvolle Interpretationsmöglichkeiten für diese Formen sind uns bisher jedoch nicht bekannt.
Man könnte das Verschwinden höherer Formen im Sinne einer kohomologischen Dimension deuten. Demnach hätte ein Graph kohomologische Dimension n, wenn die n-Formen die Formen höchsten Grades sind, die nicht alle verschwinden. In Abbildung 4.2 sind ein paar Beispiele mit den entsprechenden kohomologischen Dimensionen dargestellt. Die Werte dieser „Dimension“ erscheinen uns jedoch eher willkürlich, weil sie sehr empfindlich von lokalen Änderungen und insbesondere auch den Richtungen der Kanten abhängen. Wir halten diese Interpretation des Verschwindens höherer Formen deshalb für fragwürdig. Andererseits ist es vielleicht auch naiv, für solche speziellen und insbesondere kleinen Graphen schon sinnvolle Werte zu erwarten. Der Test für größere Graphen ist aber extrem aufwendig und kann in diesem Rahmen nicht ausgeführt werden.

Nun wird ein inneres Produkt oder Skalarprodukt auf der Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}_V$ eingeführt. Es soll mit $\langle\!\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\!\rangle$ bezeichnet werden, um es von der später in Kapitel 4.3 auftretenden Metrik, die mit einfachen Klammern bezeichnet wird, zu unterscheiden.

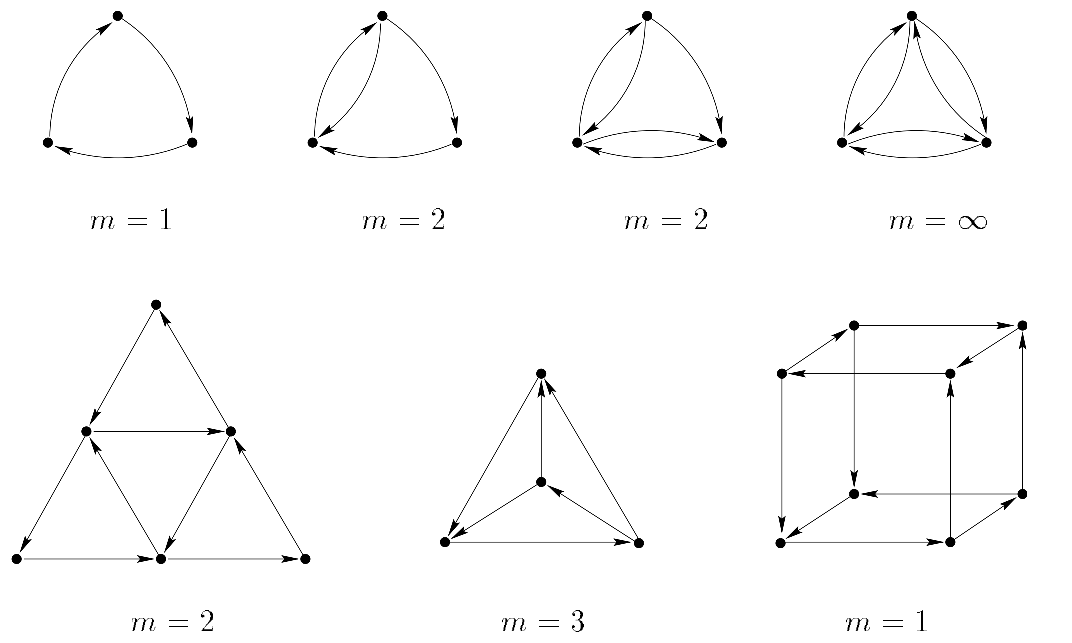


Abbildung 4.2: Einfache Beispiele von endlichen, gerichteten Digraphen. Die Zahl m ist die maximale Stufe der Differentialalgebra, in der nicht alle Formen verschwinden.

Definition 4.9 (Skalarprodukt auf $\Omega\mathcal{A}_V$) *Sei*

$$\begin{aligned} \langle\!\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\!\rangle_n : \Omega^n\mathcal{A}_V \times \Omega^n\mathcal{A}_V &\to \mathbb{C} \\ (\omega,\eta) &\mapsto \langle\!\langle \omega,\eta \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

eine nichtentartete Sesquilinearform auf $\Omega^n\mathcal{A}_V$. Dabei wird nur $\mathbb{C}$-Linearität gefordert. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle\!\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\!\rangle : \Omega\mathcal{A}_V \times \Omega\mathcal{A}_V &\to \mathbb{C} \\ (\omega,\eta) &\mapsto \begin{cases} \langle\!\langle \omega,\eta \rangle\!\rangle_n & \textit{falls} \quad \omega,\eta \in \Omega^n\mathcal{A}_V\,, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

das zugehörige Skalarprodukt *auf $\Omega\mathcal{A}_V$.*

Die Sesquilinearformen auf den Stufen $\Omega^n\mathcal{A}_V$ können dabei beliebig festgesetzt werden. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man dann auch den zu d adjungierten Operator d^* definieren.

Definition 4.10 (Adjungierter Operator d^* zu d) *Der zu d adjungierte Operator ist gegeben durch $d^* : \Omega^n\mathcal{A}_V \to \Omega^{n-1}\mathcal{A}_V$, $\langle\!\langle \omega, d^*\eta \rangle\!\rangle := \langle\!\langle d\omega, \eta \rangle\!\rangle$ mit $\omega \in \Omega^{n-1}\mathcal{A}_V$ und $\eta \in \Omega^n\mathcal{A}_V$. Weiterhin ist $d^*\mathcal{A}_V := \{0\}$.*

Schließlich führen wir in Analogie zur klassischen Differentialgeometrie den Laplace-Beltrami-Operator bezüglich des definierten Skalarprodukts ein.

Definition 4.11 (Laplace-Beltrami-Operator) *Der* Laplace-Beltrami-Operator *auf $\Omega\mathcal{A}_V$ bezüglich $\langle\!\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\!\rangle$ ist gegeben durch $\Delta := -dd^* - d^*d$, wobei d^* der zu d bezüglich $\langle\!\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\!\rangle$ adjungierte Operator ist.*

Auf Funktionen aus $\mathcal{A}_V$ reduziert sich der Laplace-Beltrami-Operator auf $\Delta f = (-dd^*f - d^*df) = -d^*df$, d. h. $\Delta|_{\mathcal{A}_V} = -d^*d$. Die Übertragung des Laplace-Beltrami-Operators gelingt nur auf diese Weise, da es in dem hier vorgestellten Rahmen kein Analogon des Hodge-$*$-Operators gibt. Der Grund dafür ist, daß die Formenalgebra im allgemeinen nicht bei einer bestimmten Stufe $\Omega^n\mathcal{A}_V$ abbricht, wie dies in der klassischen Differentialgeometrie der Fall ist. Somit ist die Definition einer Volumenform nicht mehr möglich und damit auch ein Hodge-$*$-Operator nicht definierbar.

Zum Abschluß dieses Abschnitts kommen wir nun noch einmal auf den Fall einer unendlichen, aber abzählbaren Menge V zurück. Auch in diesem Fall kann man die von Mengen $\{e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, \dots\}$ endlich erzeugten Ideale in $\Omega\mathcal{A}_V$ und die daraus gewonnenen Differentialideale $\tilde{\mathcal{I}}$ betrachten. Die erzeugenden Mengen müssen dabei nicht endlich sein. Weiterhin bereitet auch die Quotientenbildung von $\Omega\mathcal{A}_V/\tilde{\mathcal{I}}$ keine Probleme. Schränkt man sich dann auf reduzierte Differentialalgebren mit den Eigenschaften

(i) für jedes $i \in I$ sind nur endlich viele $e_{ij} \neq 0$,

(ii) für jedes $j \in I$ sind nur endlich viele $e_{ij} \neq 0$,

ein, so reduzieren sich alle auftretenden Summen bis auf je eine auf endliche Summen. Die verbleibende unendliche Summe kann aber im Sinne punktweiser Konvergenz von Funktionen interpretiert werden. In der Graphen-Interpretation bedeuten die Bedingungen (i) und (ii), daß man sich auf lokal endliche Graphen im Sinne von Definition 2.7 einschränkt. Dies scheint insbesondere auch unter Berücksichtigung der in Kapitel 3 entwickelten Dimensionstheorie physikalisch sinnvoll zu sein. Denn Graphen, die diese Eigenschaft nicht haben, besitzen auch keine wohldefinierte Dimension im Sinne von Kapitel 3.

4.2 Direkte Konstruktion eines Differentialkalküls auf Graphen

Die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Konstruktion von Differentialalgebren über der Algebra $\mathcal{A}_V$ der Funktionen $f : V \to \mathbb{C}$ auf einer abzählbaren Menge V ist in gewisser Weise eine "top-down" Methode. Es wird zunächst das allgemeinste Objekt konstruiert, das den Anforderungen an eine Differentialalgebra genügt. Das Ergebnis ist die universelle Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}_V$ über der Algebra $\mathcal{A}_V$. Dann wird diese durch Quotientenbildung nach Differentialidealen $\tilde{\mathcal{I}}$ reduziert.

Die resultierenden Quotientenalgebren $\Omega\mathcal{A}_V/\tilde{\mathcal{I}}$ können dann geometrisch gedeutet werden und werden konkret als Differentialkalküle von Graphen interpretiert.

Der in diesem Abschnitt beschriebene Ansatz zur Konstruktion eines Differentialkalküls auf Graphen verfährt umgekehrt. Am Anfang steht ein lokal endlicher Digraph $\mathcal{G} = (V, E)$. Zu diesem werden dann Schritt für Schritt Algebren konstruiert, die die geometrische Struktur des Graphen kodieren sollen. Im Gegensatz zum Ansatz in 4.1 liegt hier der Schwerpunkt auf der Kodierung der geometrischen Struktur des *gegebenen* Graphen. Die folgende Ausarbeitung dieses Ansatzes folgt den von Requardt in [Req1, Req2] entwickelten Ideen.

Sei also $\mathcal{G} = (V, E)$ ein lokal endlicher Digraph mit Vertexmenge $V = \{n_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ und Kantenmenge $E = \{n_{ij} : (i,j) \in J \subset I \times I\}$. Weiterhin sei $\mathcal{G}$ schleifenfrei, d. h. alle $(i,i) \notin J$. Alle Definitionen in diesem Ansatz sollen direkt geometrisch und physikalisch motiviert sein. In einer möglichen physikalischen Interpretation werden die Elemente von V als Punkte einer diskreten Raumzeit aufgefaßt. Die Elemente von E legen dann fest, welche Punkte in dem Sinn benachbart sind, daß sie sich gegenseitig beeinflussen können. Physikalische Wirkungen sind in der Regel symmetrisch. Deshalb setzen wir $(i,j) \in J \Leftrightarrow (j,i) \in J$, also einen symmetrischen Digraphen, voraus („actio = reactio"). In [Req1] wird sogar $b_{ik} := n_{ik} - n_{ki}$ als die eigentliche physikalische Größe angesehen. Im folgenden verwenden wir die Schreibweise $n_{ij} = 0$, falls $(i,j) \notin E$ gilt.
Sei $\mathcal{C}^0_\mathcal{G}$ der über $\mathbb{C}$ mit Basis V frei erzeugte Vektorraum. Die Wahl des Körpers $\mathbb{C}$ ist hier eher willkürlich. Die vorgestellte Konstruktion ist auch über beliebigen anderen Körpern denkbar. In Anlehnung an den vorangehenden Abschnitt und zur besseren Vergleichbarkeit mit den dort definierten Strukturen wird im folgenden aber ausschließlich $\mathbb{C}$ verwendet. Durch die Definition $n_i \cdot n_j := \delta_{ij} n_i$ einer Multiplikation und lineare Erweiterung auf ganz $\mathcal{C}^0_\mathcal{G}$ wird $\mathcal{C}^0_\mathcal{G}$ zu einer Algebra über $\mathbb{C}$. Die so gebildete Algebra ist bei endlichem V isomorph zu der Algebra $\mathcal{A}_V$ der Funktionen $f : V \to \mathbb{C}$. Der Isomorphismus wird durch $\Phi : V \to \{e_i : i \in I\}$, $n_i \mapsto e_i$ induziert.
Nun kann man induktiv die Symbole $n_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ einführen, indem man $n_{i_0 \ldots i_r} \cdot n_{j i_{r+1}} = \delta_{i_r j} n_{i_0 \ldots i_r i_{r+1}}$ setzt. $n_{i_0 \ldots i_r} = 0$ gilt genau dann, wenn $(i_j, i_{j+1}) \notin E$ für mindestens ein $j \in \{0, \ldots, r\}$ ist. Die Menge $\{n_{i_0 \ldots i_r}\}$ ist also isomorph zur Menge der Wege der Länge r in $\mathcal{G}$. Weiterhin sei $\mathcal{C}^r_\mathcal{G}$ der über $\mathbb{C}$ mit Basis $\{n_{i_0 \ldots i_r}\}$ frei erzeugte Vektorraum. $\mathcal{C}^r_\mathcal{G}$ wird durch die Definitionen $n_j \cdot n_{i_0 \ldots i_r} := \delta_{j i_0} n_{i_0 \ldots i_r}$ und $n_{i_0 \ldots i_r} \cdot n_j := \delta_{i_r j} n_{i_0 \ldots i_r}$ und lineare Erweiterung auf ganz $\mathcal{C}^r_\mathcal{G}$ zu einem $\mathcal{C}^0_\mathcal{G}$-Bimodul. $\mathcal{C}_\mathcal{G} := \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{C}^r_\mathcal{G}$ wird mit der linearen Erweiterung der bei der Definition von $n_{i_0 \ldots i_r}$ angegebenen Multiplikation zu einer $\mathbb{N}_0$-graduierten Algebra.
Schließlich definiert man auf der graduierten Algebra $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ den Operator $d : \mathcal{C}_\mathcal{G} \to \mathcal{C}_\mathcal{G}$ beziehungsweise $d : \mathcal{C}^r_\mathcal{G} \to \mathcal{C}^{r+1}_\mathcal{G}$ durch

$$d0 = 0 \qquad \text{und} \qquad dn_{i_0 \ldots i_r} = \sum_{j \in I} \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \, n_{i_0 \ldots i_{k-1} j i_k \ldots i_r} \tag{4.1}$$

und lineare Erweiterung auf ganz $\mathcal{C}_\mathcal{G}^r$. Die Summe ist dabei wohldefiniert, da aufgrund der lokalen Endlichkeit von $\mathcal{G}$ nur endlich viele der Summanden nicht Null sind. Diese Definition ist unter anderem durch die Definition der Cartanschen Ableitung in der klassischen Differentialgeometrie, wie sie etwa in [GHV] angegeben ist, inspiriert.
Damit ist die Konstruktion des Differentialkalküls auf dem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ abgeschlossen. Nun werden einige Eigenschaften der erzeugten Algebra $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ untersucht.

Lemma 4.12 *Der Operator d erfüllt die verallgemeinerte Leibnizregel $d(\omega\eta) = d\omega\,\eta + (-1)^r\omega d\eta$ für $\omega \in \mathcal{C}_\mathcal{G}^r$ und $\eta \in \mathcal{C}_\mathcal{G}^s$.*

Beweis. Die Elemente einer Stufe $\mathcal{C}_\mathcal{G}^n$ von $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ werden aus Elementen $n_{i_0\dots i_n}$ endlich erzeugt. Also haben wir

$$\omega = \sum_{i_0,\dots,i_r \in I} \omega_{i_0\dots i_r} n_{i_0\dots i_r} \qquad \text{und} \qquad \eta = \sum_{i_0,\dots,i_s \in I} \eta_{i_0\dots i_s} n_{i_0\dots i_s}$$

mit Koeffizienten $\omega_{i_0\dots i_r}$ und $\eta_{i_0\dots i_s} \in \mathbb{C}$, von denen nur endlich viele nicht Null sind. Insbesondere seien auch diejenigen Koeffizienten Null, die zu Elementen $n_{i_0\dots i_r}$ aus $\mathcal{C}_\mathcal{G}^r$ gehören, die selbst schon nicht existieren. Diese Vereinbarung erspart komplizierte Überlegungen für den Fall, daß $n_{i_0\dots i_r}$ nicht existiert, $n_{i_0\dots i_{k-1} j i_k \dots i_r}$ aber für irgendwelche $0 \le k \le r+1$, $j \in I$ nicht Null ist. Nun ist

$$\begin{aligned} d(\omega\eta) &= d\Big(\sum_{i_0,\dots,i_{r+1} \in I} \omega_{i_0\dots i_r} n_{i_0\dots i_r} \sum_{j_0,\dots,j_s \in I} \eta_{j_0\dots j_s} n_{j_0\dots j_s} \Big) \\ &= \sum_{i_0,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s \in I} \omega_{i_0\dots i_r} \eta_{i_r j_1 \dots j_s} dn_{i_0\dots i_r j_1\dots j_s} \,. \end{aligned}$$

Benennt man die Indizes j_n in i_{r+n} für $0 \le n \le s$ um, so ergibt sich

$$d(\omega\eta) = \sum_{i_0,\dots,i_{r+s} \in I} \omega_{i_0\dots i_r} \eta_{i_r \dots i_{r+s}} \sum_{l \in I} \sum_{k=0}^{r+s+1} (-1)^k \, n_{i_0\dots i_{k-1} l i_k \dots i_{r+s}} \,. \tag{4.2}$$

Dabei sorgt die oben getroffene Vereinbarung über die Koeffizienten $\omega_{i_0\dots i_r}$ und $\eta_{i_r\dots i_{r+s}}$ dafür, daß nicht über zu viele Summanden summiert wird. Alle Summanden $n_{i_0\dots i_{k-1} l i_k \dots i_{r+s}}$ in der inneren Summe, die aus $n_{i_0\dots i_{r+s}} = 0$ entstanden sind, werden durch $\omega_{i_0\dots i_r} = 0$ oder $\eta_{i_r\dots i_{r+s}} = 0$ vernichtet.
Andererseits hat man

$$\begin{aligned} &d\omega\,\eta + (-1)^r\omega d\eta \\ &= \sum_{i_0,\dots,i_r \in I} \omega_{i_0\dots i_r} dn_{i_0\dots i_r} \sum_{j_0,\dots,j_s \in I} \eta_{j_0\dots j_s} n_{j_0\dots j_s} + (-1)^r \sum_{i_0,\dots,i_r \in I} \omega_{i_0\dots i_r} n_{i_0\dots i_r} \sum_{j_0,\dots,j_s \in I} \eta_{j_0\dots j_s} dn_{j_0\dots j_s} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_0,\ldots,i_r,j_0,\ldots,j_s \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{j_0\ldots j_s} \Big(\sum_{l\in I} \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_r} n_{j_0\ldots j_s} \\ + (-1)^r \sum_{l\in I} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k n_{i_0\ldots i_r} n_{j_0\ldots j_{k-1} l j_k \ldots j_s} \Big) .$$

Auch hier sorgt die Vereinbarung über die Koeffizienten zu nichtexistenten Basiselementen dafür, daß keine zusätzlichen falschen Terme auftreten, und die Summation muß deshalb nicht weiter eingeschränkt werden. Nun zieht man aus den Summen den letzten beziehungsweise den ersten Term heraus und erhält

$$= \sum_{i_0,\ldots i_r,j_0,\ldots j_s \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{j_0\ldots j_s} \sum_{l\in I} \Big(\sum_{k=0}^{r} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_r} n_{j_0\ldots j_s} + (-1)^{r+1} n_{i_0\ldots i_r l} n_{j_0\ldots j_s} \\ + (-1)^{r+0} n_{i_0\ldots i_r} n_{l j_0\ldots j_s} + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k+r} n_{i_0\ldots i_r} n_{j_0\ldots j_{k-1} l j_k \ldots j_s} \Big)$$

$$= \sum_{i_0,\ldots i_r,j_0,\ldots j_s \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{j_0\ldots j_s} \Big[\sum_{l\in I} \Big(\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \delta_{i_r j_0} n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_r j_1 \ldots j_s} \\ + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k+r} \delta_{i_r j_0} n_{i_0\ldots i_r j_1 \ldots j_{k-1} l j_k \ldots j_s} \Big) \\ + (-1)^{r+1} n_{i_0\ldots i_r j_0 \ldots j_s} + (-1)^r n_{i_0\ldots i_r j_0\ldots j_s} \Big] .$$

Die letzten beiden Terme heben sich weg. Anwenden der äußeren Summe auf die Kronecker-Deltas liefert

$$= \sum_{i_0,\ldots,i_r,j_1\ldots,j_s \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{i_r j_1\ldots j_s} \sum_{l\in I} \Big(\sum_{k=0}^{r} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_r j_1 \ldots j_s} + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k+r} n_{i_0\ldots i_r j_1\ldots j_{k-1} l j_k \ldots j_s} \Big)$$

und Umbenennung von j_n in j_{r+n} für $1 \leq n \leq s$ schließlich

$$= \sum_{i_0,\ldots,i_{r+s} \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{i_r i_{r+1} \ldots i_{r+s}} \sum_{l\in I} \Big(\sum_{k=0}^{r} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_{r+s}} + \sum_{k=r+1}^{r+s+1} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_{r+s}} \Big)$$

$$= \sum_{i_0,\ldots,i_{r+s} \in I} \omega_{i_0\ldots i_r} \eta_{i_r \ldots i_{r+s}} \sum_{l\in I} \sum_{k=0}^{r+s+1} (-1)^k n_{i_0\ldots i_{k-1} l i_k \ldots i_{r+s}} .$$

Das ist gerade der Ausdruck in (4.2). □

Der Beweis von Lemma 4.12 kann ebenfalls in einer etwas weniger formalen und kürzeren Weise geführt werden. Wir geben diesen alternativen Beweis hier jedoch

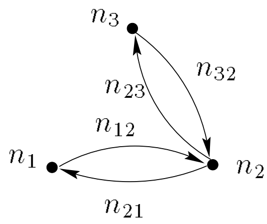


Abbildung 4.3: Beispiel eines einfachen Graphen mit $d^2 n_1 \neq 0$

nicht auch noch an. Jetzt schließt sich die Frage an, ob die Relation $d^2 = 0$ ebenfalls erfüllt ist. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.13 Sei $V = \{n_1, n_2, n_3\}$ und $E = \{n_{12}, n_{21}, n_{23}, n_{32}\}$. Die Situation ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Dann erhält man

$$\begin{aligned} d^2 n_1 &= d\Big(\sum_{i\in I} n_{i1} - n_{1i}\Big) = d(n_{21} - n_{12}) \\ &= \sum_{i\in I}(n_{j21} - n_{2j1} + n_{21j} - n_{j12} + n_{1j2} - n_{12j}) \\ &= n_{121} + n_{321} - 0 + n_{212} - n_{212} + 0 - n_{123} - n_{121} \\ &= n_{321} - n_{123} \neq 0\,. \end{aligned}$$

Es gilt demnach nicht $d^2 = 0$. □

Diese Tatsache wirft die Frage auf, ob und welche Graphen es gibt, die dennoch die Relation $d^2 = 0$ erlauben. Wie sich zeigt, gibt es solche Graphen. Es sind genau die, deren Zusammenhangskomponenten Simplizes sind. Anders ausgedrückt bedeutet das, daß die einzigen zusammenhängenden Graphen, bei denen $d^2 = 0$ erfüllt ist, Simplizes sind. Diese Graphen sind aufgrund der geforderten lokalen Endlichkeitseigenschaft insbesondere endlich. Wir fassen die Aussage in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 4.14 *$d^2 = 0$ gilt auf einem Graphen genau dann, wenn die Zusammenhangskomponenten des Graphen Simplizes sind.*

Zum Beweis benötigt man einige Hilfssätze. Zunächst einmal findet man das folgende Lemma, das zum Beweis der Rückrichtung von Satz 4.14 führt.

Lemma 4.15 *Ist ein Graph $\mathcal{G}$ ein Simplex, dann gilt $d^2 = 0$ in dem zugehörigen Differentialkalkül $\mathcal{C}_\mathcal{G}$.*

Beweis. Da $\{n_{i_0\ldots i_r} : i_0, \ldots, i_r \in I, r \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, daß $d^2 n_{i_0\dots i_r} = 0$ für alle r und $i_0, \dots, i_r \in I$ gilt.

$$\begin{aligned}
d^2 n_{i_0\dots i_r} &= d\Big(\sum_{j\in I}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k n_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_r}\Big) \\
&= \sum_{j,l\in I}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k\Big(\sum_{k'=0}^{k-1}(-1)^{k'} n_{i_0\dots i_{k'-1} l i_{k'}\dots i_{k-1} j i_k\dots i_r} \\
&\qquad + (-1)^k n_{i_0\dots i_{k-1} l j i_k\dots i_r} + (-1)^{k+1} n_{i_0\dots i_{k-1} j l i_k\dots i_r} \qquad (4.3)\\
&\qquad + \sum_{k'=k+2}^{r+2}(-1)^{k'} n_{i_0\dots i_{k-1} j i_k\dots i_{k'-2} l i_{k'-1}\dots i_r}\Big)\,.
\end{aligned}$$

In Ausdruck (4.3) gibt es zu jedem $s, t \in \{0, \dots, r+1\}$ mit $s \leq t$ und jedem $l, j \in I$ jeweils einen Term $(-1)^t(-1)^s n_{i_0\dots i_{s-1} l i_s\dots i_{t-1} j i_t\dots i_r}$ und einen Term $(-1)^s(-1)^{t+1}$ $n_{i_0\dots i_{s-1} j i_s\dots i_{t-1} l i_t\dots i_r}$. Für $s = t$ sind diese beiden Terme gerade die Terme der mittleren Zeile. Da $\mathcal{G}$ ein Simplex ist, verschwindet keiner der auftretenden Terme und alle Terme in (4.3) sind von dieser Form. Da die Summation symmetrisch unter der Umbenennung von j zu l und umgekehrt ist, heben sich die genannten Terme zu $j = a$, $l = b$ und $j = b$, $l = a$ aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens weg. Also ist $d^2 n_{i_0\dots i_r} = 0$. □

Man kann an diesem Beweis konkret sehen, warum auf einem Graphen, der kein Simplex ist, $d^2 \neq 0$ vorkommen kann. Ist ein Graph kein Simplex, so fehlt mindestens eine Kante und dadurch existieren einige der Terme, die im Simplex andere Terme wegheben, eventuell nicht. So wird in Beispiel 4.13 zwar n_{123} durch Einsetzen von 2 und dann Einsetzen von 3, jeweils an letzter Stelle, erzeugt. Der entsprechende Term durch Einsetzen von 3 an letzter Stelle und dann Einsetzen von 2 in der Mitte wird jedoch nicht gebildet, da $n_{13} = 0$ ist. Deshalb hebt sich in diesem Beispiel n_{123} nicht weg.

Für die folgenden Aussagen ist es sinnvoll, eine bestimmte Vertexkonstellation in einem Graphen mit einem Namen zu versehen. Wir definieren daher den Begriff eines „Haken“.

Definition 4.16 (Haken) *Ein Vertextripel $\{n_i, n_j, n_k\}$ mit $n_{ij} \neq 0$, $n_{jk} \neq 0$, aber $n_{ik} = 0$ heiße* Haken.

Aufgrund der Symmetrie der von uns betrachteten Graphen gilt in einem Haken $\{n_i, n_j, n_k\}$ auch $n_{ji} \neq 0$, $n_{kj} \neq 0$ und $n_{ki} = 0$. Der Zusammenhang zwischen der Existenz eines solchen Haken und dem Verschwinden von d^2 liefert den Schlüssel zum Beweis der anderen Richtung von Satz 4.14.

Lemma 4.17 *Enthält ein Graph $\mathcal{G}$ einen Haken $\{n_i, n_j, n_k\}$ dann ist $d^2 n_i \neq 0$, also insbesondere $d^2 \neq 0$.*

Beweis. Sei zunächst I die Indexmenge, mit der die Vertizes des Graphen $\mathcal{G}$ indiziert sind, und $\{n_i, n_j, n_k\}$ sei ein Haken in $\mathcal{G}$. Weiterhin setzen wir $\tilde{I} := I \backslash \{i, j, k\}$. Dann hat man

$$\begin{aligned} d^2 n_i &= d\Big(\sum_{r\in I} n_{ri} - n_{ir}\Big) = d\Big(n_{ji} - n_{ij} + \sum_{r\in\tilde{I}} n_{ri} - n_{ir}\Big) \\ &= n_{iji} + n_{jij} + n_{kji} - n_{iji} - n_{jij} - n_{ijk} \\ &\quad + \sum_{r\in\tilde{I}} \sum_{s\in I} n_{sri} - n_{rsi} + n_{ris} - n_{sir} + n_{isr} - n_{irs} \\ &= n_{kji} - n_{ijk} + R\,, \end{aligned}$$

wobei alle Terme in R mindestens einen Index nicht in $\{i, j, k\}$ haben. Die Terme aus R können wegen der linearen Unabhängigkeit aller $n_{lmn} \neq 0$ mit $l, m, n \in I$ nicht die beiden ersten Terme wegheben. Also ist $d^2 n_i \neq 0$. □

Nun braucht man nur noch zu verstehen, unter welchen Voraussetzungen in einem Graphen ein Haken existiert. Dies ist ein graphentheoretisches Problem. Anschaulich erscheint es plausibel, daß bei zusammenhängenden Graphen nur in Simplizes keine Haken vorkommen können. Diese Anschauung bestätigt das folgende Lemma.

Lemma 4.18 *Ein zusammenhängender Graph $\mathcal{G}$ ist ein Simplex genau dann, wenn er keinen Haken enthält.*

Beweis. Die eine Richtung ist trivial. Ist $\mathcal{G}$ ein Simplex, so sind alle $n_{ij} \neq 0$ und es kann keinen Haken geben. Die andere Richtung erfordert etwas mehr Arbeit. Wir führen eine Induktion über N, die Anzahl der Vertizes, durch.
Für $N = 1, 2$ ist die Aussage offensichtlich, da es dann nur den Simplex als zusammenhängenden Graphen gibt. Für $N = 3$ sieht man sofort, daß $\{n_1, n_2, n_3\}$ ein Haken ist, wenn eine Kante fehlt. Fehlen zwei oder mehr Kanten, ist $\mathcal{G}$ nicht mehr zusammenhängend. Also ist der Simplex der einzige Graph mit drei Vertizes, der zusammenhängend ist und keinen Haken enthält.
Sei nun die Aussage für alle Graphen mit N Vertizes richtig und $\mathcal{G}$ ein zusammenhängender Graph mit $N + 1$ Vertizes. Wir zerlegen $\mathcal{G}$ in den induzierten Untergraphen $\mathcal{G}'$ mit Vertexmenge $V' = V \backslash \{n_{N+1}\}$ und somit N Vertizes und den einzelnen Vertex n_{N+1}. Ein Haken in $\mathcal{G}'$ ist insbesondere auch einer in $\mathcal{G}$. Nach Voraussetzung gibt es in $\mathcal{G}$ keine Haken, also auch keine in $\mathcal{G}'$. Dann ist $\mathcal{G}'$ nach Induktionsvoraussetzung ein Simplex. Nimmt man nun an, es gäbe ein $n_i \in \mathcal{G}'$ mit $n_{iN+1} = 0$, dann existiert jedoch mindestens ein $n_j \in \mathcal{G}'$ mit $n_{jN+1} \neq 0$, da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Weiterhin ist $n_{ij} \neq 0$, da $\mathcal{G}'$ ein Simplex ist, und $\{n_{N+1}, n_i, n_j\}$ ist ein Haken. Das ist ein Widerspruch. Also sind alle n_{iN+1} mit n_i in $\mathcal{G}'$ nicht Null und deshalb ist $\mathcal{G}$ ein Simplex. □

Mit den Lemmata 4.15, 4.17 und 4.18 können wir jetzt Satz 4.14 beweisen.

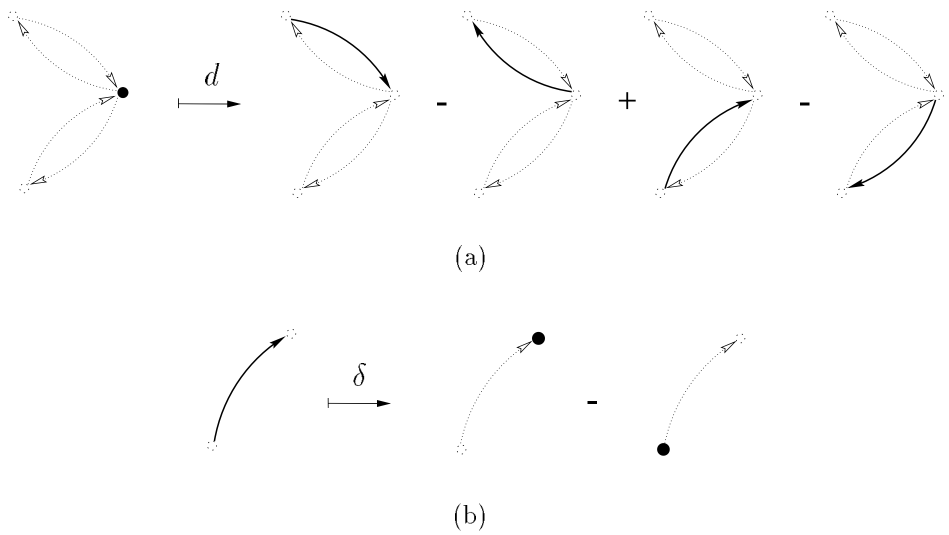


Abbildung 4.4: Anschauliche Wirkung von d und δ

Beweis von Satz 4.14. Sei $d^2 = 0$ für den Differentialkalkül $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$. Aus Lemma 4.17 folgt, daß $\mathcal{G}$ keinen Haken enthält. Insbesondere gibt es also auch keine Haken in den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$. Diese sind zusammenhängende Graphen und somit nach Lemma 4.18 Simplizes.
Umgekehrt seien die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ Simplizes. Der Differentialkalkül auf $\mathcal{G}$ ist die direkte Summe der Differentialkalküle auf den Komponenten von $\mathcal{G}$, denn es gibt keine Wege zwischen verschiedenen Zusammenhangskomponenten. Damit sind dann aber alle Produkte von Elementen aus den Differentialkalkülen verschiedener Zusammenhangskomponenten Null und auch d kann nicht aus dem Differentialkalkül einer Zusammenhangskomponente herausführen. Für die Differentialkalküle der Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ ist Lemma 4.15 anwendbar, und es folgt $d^2 = 0$ in allen Differentialkalkülen der Zusammenhangskomponenten und damit auch in der direkten Summe, dem Differentialkalkül von $\mathcal{G}$. □

Man hat im allgemeinen also die Eigenschaft $d^2 = 0$ verloren. Dafür sind die höheren Formen $\omega \in \mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ als Wege der Länge r bzw. als Summen von Wegen der Länge r in $\mathcal{G}$ interpretierbar.

Lemma 4.19 *Eine Form $n_{i_0 \ldots i_r} \in \mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ ist genau dann Null, wenn der entsprechende Weg n_{i_0} nach n_{i_1} usw. bis nach n_{i_r} in $\mathcal{G}$ unterbrochen ist.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Definition der Multiplikation von Formen als Verkettung von Wegen und der Tatsache, daß keine weiteren Relationen gefordert werden. □

Nun wenden wir uns noch einmal intensiver dem Differentialkalkül erster Ordnung zu. Aus der allgemeinen Formel für d berechnet man die Wirkung auf einen einzelnen Vertex n_i als $dn_i = \sum_{k \in I} n_{ki} - n_{ik}$. Einem Vertex wird also die Summe aller einlaufenden und auslaufenden Kanten zugeordnet. Dabei werden die einlaufenden Kanten positiv und die auslaufenden negativ gezählt. Abbildung 4.4(a) veranschaulicht den Vorgang. Üblicherweise bezeichnet man einen solchen Operator als einen Ko-Randoperator. Man definiert nun auch das dazu in gewisser Weise duale Objekt, den Randoperator δ.

Definition 4.20 (Randoperator) *Der* Randoperator $\delta : \mathcal{C}^1_{\mathcal{G}} \to \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$ *ist durch* $\delta n_{ik} := n_k - n_i$ *und* $\mathbb{C}$*-lineare Fortsetzung auf ganz* $\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}$ *definiert.*

δ bildet also eine Kante auf ihre Endpunkte mit durch die Orientierung der Kante gegebenen Vorzeichen ab. Der Vorgang ist in Abbildung 4.4(b) veranschaulicht. Es wird unten erläutert, in welchem Sinn δ dual zu d ist. Mit Hilfe der Operatoren d und δ definieren wir einen Laplace-Operator auf $\mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$.

Definition 4.21 (Laplace-Operator auf $\mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$) *Der* Laplace-Operator Δ *auf einem Graphen* $\mathcal{G}$ *ist durch* $\Delta : \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}} \to \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$, $\phi \mapsto -\frac{1}{2}\delta d\phi$ *definiert.*

Die Wirkung von Δ auf beliebige $\phi \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$ folgt durch Nachrechnen.

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -\frac{1}{2}\delta d \sum_{i \in I} \phi_i n_i = -\frac{1}{2}\delta \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \mathrm{NN}(i)}} \phi_i (n_{ki} - n_{ik}) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \mathrm{NN}(i)}} \phi_i (n_i - n_j - n_j + n_i) = \Big(\sum_{\substack{i \in I \\ j \in \mathrm{NN}(i)}} \phi_i n_j - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \mathrm{NN}(i)}} \phi_i n_i \Big) \\
&= \Big(\sum_{\substack{j \in I \\ i \in \mathrm{NN}(j)}} \phi_i n_j - \sum_{i \in I} v_i \phi_i n_i \Big) = \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in \mathrm{NN}(i)} \phi_j n_i - v_i \phi_i n_i \Big) \qquad (4.4) \\
&= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in \mathrm{NN}(i)} \phi_j - v_i \phi_i \Big) n_i \,.
\end{aligned}$$

Dabei ist v_i der Grad des Vertex n_i und das Symbol $j \in \mathrm{NN}(i)$ steht dafür, daß n_j zu den nächsten Nachbarn von n_i gehört, also daß $(i,j) \in J$ gilt. In Gleichung (4.4) wurde die Symmetrie des Graphen genutzt, um die Gleichheit der Summe über $i \in I, j \in \mathrm{NN}(i)$ mit der Summe $j \in I, i \in \mathrm{NN}(j)$ einzusehen. In der darauffolgenden Zeile wurden dann nur die Bezeichnungen i und j vertauscht.
Anschaulich ist die Wirkung des Laplace-Operators an einer Stelle n_i demnach die Differenzbildung zwischen der Summe der zu benachbarten Vertizes gehörenden Werte und dem v_i-fachen des zu n_i gehörenden Wertes einer Funktion.

Es zeigt sich, daß der so gewonnene Laplace-Operator gerade dem aus der Graphentheorie bekannten Laplace-Operator entspricht. Zum näheren Verständnis dieses Zusammenhangs sind zwei weitere Begriffe aus der Graphentheorie notwendig.

Definition 4.22 (Adjazenzmatrix, Gradmatrix) *Die* Adjazenzmatrix *eines Graphen $\mathcal{G}$ ist eine quadratische Matrix* $\mathbf{A}$ *mit Einträgen* $\mathbf{A}_{ij} = 1$, *wenn* $(i,j) \in J$ *und* $\mathbf{A}_{ij} = 0$ *sonst. Die* Gradmatrix $\mathbf{V}$ *ist eine diagonale Matrix mit Diagonaleinträgen v_i, dem Grad von n_i, in der i-ten Zeile. Bei einem endlichen Graphen mit N Knoten sind* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{V}$ *gerade $N \times N$ Matrizen.*

Mit Hilfe der Adjazenz- und Gradmatrix definiert man in der Graphentheorie einen Laplace-Operator auf dem Raum $\mathcal{A}_V$ der Funktionen $\phi : V \to \mathbb{C}$. Die Elemente diese Funktionenraumes werden als Vektoren $(\phi_1, \phi_2, \dots)$ dargestellt, wobei $\phi_i = \phi(n_i)$ ist.

Definition 4.23 (Graphentheoretischer Laplace-Operator) *Der Laplace-Operator auf einem Graphen $\mathcal{G}$ ist durch $\Delta_G = \mathbf{A} - \mathbf{V}$ definiert.*

Wendet man diesen Laplace-Operator auf eine Vertexfunktion ϕ an, so erhält man

$$\Delta_G \phi\big|_{n_i} = \sum_{j \in I} \mathbf{A}_{ij} \phi_j - \mathbf{V}_{ij} \phi_j = \sum_{j \in \mathrm{NN}(i)} \phi_j - v_i \phi_i \,.$$

Für Funktionen ϕ mit endlichem Träger induziert $\Phi : \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}} \to \mathcal{A}_V$, $n_i \mapsto e_i$, wobei e_i die Indikatorfunktionen aus Abschnitt 4.1 bezeichnet, einen Algebraisomorphismus zwischen $\mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{A}_V$, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{A}_V \arrow[d, "\Delta_G"] \\ \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Phi"'] & \mathcal{A}_V \end{tikzcd}$$

kommutiert. In diesem Sinne sind Δ und Δ_G dieselben Operatoren.

Andererseits stimmt der von uns definierte Laplace-Operator aber auch mit der direkten Übertragung des Laplace-Operators aus der klassischen Differentialgeometrie überein. Wir erläutern diese Aussage im folgenden.
Man kann die Räume $\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ zu komplexen Hilberträumen erweitern. Dazu definiert man komplexe Skalarprodukte auf $\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$.

Definition 4.24 (Skalarprodukte) *Auf $\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ wird durch*

$$\langle\!\langle \omega, \eta \rangle\!\rangle_r := \sum_{\substack{j_0 \in I \\ j_1 \in \mathrm{NN}(j_0), \dots, j_r \in \mathrm{NN}(j_{r-1})}} \overline{\omega_{j_0 \dots j_r}}\, \eta_{j_0 \dots j_r} \quad \text{für} \quad \omega = \sum_{j_0, \dots, j_r \in I} \omega_{j_0 \dots j_r} n_{j_0 \dots j_r}$$

$$\text{und} \quad \eta = \sum_{j_0, \dots, j_r \in I} \eta_{j_0 \dots j_r} n_{j_0 \dots j_r} \in \mathcal{C}^r_{\mathcal{G}} \,,$$

ein Skalarprodukt *definiert.*

Diese Skalarprodukte sind positiv definite, hermitesche Sesquilinearformen, wie man das von dem Skalarprodukt auf einem komplexen (Prä-)Hilbertraum erwartet. Nun kann man alle $\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ zu Hilberträumen erweitern.

Definition 4.25 *Die Hilberträume $\mathcal{H}_r$ seien die Normabschlüsse der Räume $\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ unter der von $\langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle_n$ induzierten Norm $\| \cdot \|^2_n := \langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle_n$,*

$$\mathcal{H}_r := \overline{\mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}}^{\| \, \|_r} .$$

Weiterhin sei $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ die direkte Summe von $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$.

Mit diesen Definitionen sind $(d, 0)$ und $(0, \delta)$ sowie $(\Delta, 0)$ Operatoren auf $\mathcal{H}$. Sie sind zunächst nicht notwendig beschränkt und haben deshalb möglicherweise Definitionsbereiche, die echte Teilmengen von $\mathcal{H}$ sind. Weiterhin ist $\mathcal{H}_0$ isomorph zu $l^2_I(\mathbb{C})$ und $\mathcal{H}_1$ isomorph zu $l^2_J(\mathbb{C})$. Dabei bezeichnet $l^2_I(\mathbb{C})$ die quadratsummablen Folgen mit Indexmenge I und $l^2_J(\mathbb{C})$ die quadratsummablen Folgen mit Indexmenge J. Wir definieren auch hier den zu d adjungierten Operator d^*.

Definition 4.26 (Adjungierter Operator d^* zu d) *Der zu d adjungierte Operator d^* ist durch $d^* : \mathcal{C}^r_{\mathcal{G}} \to \mathcal{C}^{r-1}_{\mathcal{G}}$, $\langle\!\langle d^*\omega, \eta \rangle\!\rangle := \langle\!\langle \omega, d\eta \rangle\!\rangle$ für alle $\omega \in \mathcal{C}^r_{\mathcal{G}}$ und $\eta \in \mathcal{C}^{r-1}_{\mathcal{G}}$ gegeben.*

Nun kann man direkt ausrechnen, in welcher Beziehung δ und $d^*|_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}}$ zueinander stehen.

Lemma 4.27 *Es gilt $\langle\!\langle \delta\omega, \eta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \omega, d\eta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle d^*\omega, \eta \rangle\!\rangle$ für alle $\omega \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}$ und $\eta \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{G}}$. Also ist $\delta = d^*|_{\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}}$.*

Beweis. Man berechnet die Wirkung von δ auf ein beliebiges Element ω von $\mathcal{H}_1$.

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \delta\omega, \phi \rangle\!\rangle &= \Big\langle\!\!\Big\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{ij}\,\delta n_{ij}, \sum_{k\in I} \phi_k n_k \Big\rangle\!\!\Big\rangle \\
&= \Big\langle\!\!\Big\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{ij} n_j, \sum_{k\in I} \phi_k n_k \Big\rangle\!\!\Big\rangle - \Big\langle\!\!\Big\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{ij} n_i, \sum_{k\in I} \phi_k n_k \Big\rangle\!\!\Big\rangle \\
&= \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij}}\, \phi_j - \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij}}\, \phi_i \\
&= \Big\langle\!\!\Big\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{ij} n_{ij}, \sum_{\substack{k\in I\\ l\in \mathrm{NN}(k)}} \phi_l n_{kl} \Big\rangle\!\!\Big\rangle - \Big\langle\!\!\Big\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{ij} n_{ij}, \sum_{\substack{k\in I\\ l\in \mathrm{NN}(k)}} \phi_k n_{kl} \Big\rangle\!\!\Big\rangle \\
&= \Big\langle\!\!\Big\langle \omega, \sum_{\substack{k\in I\\ l\in \mathrm{NN}(k)}} \phi_k (n_{lk} - n_{kl}) \Big\rangle\!\!\Big\rangle \\
&= \langle\!\langle \omega, d\phi \rangle\!\rangle .
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.28 *Mit der oben angegebenen Hilbertraumstruktur für $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$ und damit $\mathcal{H}$ gilt $d^*d = -2\Delta$. Dies überträgt bis auf einen Faktor zwei genau die Situation des Laplace-Beltrami-Operators auf Nullformen in der klassischen Differentialgeometrie.*

Im Sinne von 4.28 ist der hier ad hoc definierte Laplace-Operator der zu dem eingeführten d und dem definierten Skalarprodukt gehörende Laplace-Beltrami-Operator.
Vergleicht man die Resultate mit denen aus Kapitel 4.1, so gibt es einige Übereinstimmungen. Das eingeführte Skalarprodukt entspricht gerade einem der in 4.1 eingeführten Skalarprodukte, wenn man dort die passende Seqilinearform wählt. Auch der Laplace-Beltrami-Operator ist bis auf einen Faktor zwei identisch. Man könnte ihn auch hier auf ganz $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ erweitern, indem man $\Delta := -\frac{1}{2}(dd^* + d^*d)$ setzt. Der Faktor zwei wird am Ende von Kapitel 5 auf Seite 104 ausführlich diskutiert.

4.3 Graphen als diskrete Mannigfaltigkeiten

In der Anwendung der klassischen Feldtheorie auf Graphen in Kapitel 5 verwenden wir wieder einen etwas anderen mathematischen Rahmen als die in 4.1 und 4.2 vorgestellten Differentialkalküle. In gewisser Weise kann man einen Graphen konkret mit einer Struktur versehen, die zu der einer Mannigfaltigkeit in der klassischen Differentialgeometrie analog ist. Dabei verwendet man diskrete Ableitungen als Analogon zu den Richtungsableitungen in Karten, die man im klassischen Fall hat. Der hier vorgestellte Ansatz ist aber auch die Verallgemeinerung des üblichen Differenzenkalküls auf Gittern, der in numerischen Anwendungen verwendet wird. Dort ersetzt man die Richtungsableitungen des $\mathbb{R}^n$ durch diskrete Ableitungen.

Bevor jedoch die Konstruktion des Differentialkalküls durchgeführt wird, erscheint die folgende Bemerkung angebracht. Wir verwenden hier wie in den vorangehenden Kapiteln die Algebra $\mathcal{A}_V$ der komplexwertigen Funktionen auf der Vertexmenge V eines Graphen $\mathcal{G}$. In der klassischen Differentialgeometrie hingegen arbeitet man meist mit reellen Mannigfaltigkeiten M und der Algebra C^∞_M der unendlich oft differenzierbaren, *reellwertigen* Funktionen auf M. In der Physik ist es jedoch oft nützlich, zwei unabhängige *reelle* Felder ϕ^1, ϕ^2, die als mathematische Objekte Schnitte im Formenbündel über M oder als Spezialfall davon 0-Formen, also Elemente aus C^∞_M sind, als ein *komplexes* Feld $\phi = \phi^1 + i\phi^2$ aufzufassen. Deshalb verwendet man statt C^∞_M die Algebra $\mathcal{A}_M$ der komplexwertigen, unendlich oft reell differenzierbaren Funktionen auf M und spannt auch das Formenbündel über $\mathbb{C}$ statt über $\mathbb{R}$ auf. Es handelt sich dabei um eine äußere Komplexifizierung, denn die Karten der Mannigfaltigkeit bleiben reell. Ebenso wird stets nur *reelle* Differenzierbarkeit gefordert. Natürlich ist der Spezialfall reeller Funktionen in dieser Konstruktion immer noch enthalten. Durch Verwendung komplexwertiger

Funktionen auf V lehnen wir uns an dieses Vorgehen an, wahren vor allem aber auch die Vergleichbarkeit mit den vorangegangenen Kapiteln.

Wir wenden uns jetzt der Konstruktion des diskreten Differentialkalküls zu. Sei $\mathcal{A}_V$ also wieder die Algebra der Funktionen auf der Vertexmenge V eines lokal endlichen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Weiterhin seien $\{e_i : i \in I\}$ die in 4.1 verwendeten Elementarfunktionen, also $e_i : V \to \mathbb{C}$, $n_j \mapsto \delta_{ij}$.

Definition 4.29 (Diskrete Richtungsableitung) *Die Abbildung $\partial_{ij} : \mathcal{A}_V \to \mathbb{C}$, $\phi \mapsto \phi_j - \phi_i$ heißt* diskrete Richtungsableitung *in Richtung n_j an dem Vertex n_i.*

Die diskreten Richtungsableitungen an einem Vertex spannen in Analogie zu den Punktderivationen an einem Punkt p einer Mannigfaltigkeit einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ auf. Diesen Vektorraum definieren wir als den Tangentialraum von $\mathcal{G}$ an dem Vertex n_i.

Definition 4.30 (Tangentialraum) *Sei $T_i\mathcal{G}$ der über $\mathbb{C}$ mit Basis $\{\partial_{ij} : j \in \mathrm{NN}(i)\}$ aufgespannte Vektorraum. $T_i\mathcal{G}$ heißt* Tangentialraum von $\mathcal{G}$ an dem Vertex *n_i. Weiterhin heißt $TG := \coprod_{i\in I} T_i\mathcal{G}$, die disjunkte Vereinigung aller $T_i\mathcal{G}$, der* Tangentialraum von $\mathcal{G}$.

Man kann $T\mathcal{G}$ ganz in Analogie zur klassischen Differentialgeometrie als ein diskretes Vektorbündel über V auffassen. $T\mathcal{G}$ ist der Totalraum und $\pi : TG \to V$, $\partial_{ij} \mapsto n_i$ die Projektion auf den Basisraum V. Die Fasern sind die einzelnen Vektorräume $T_i\mathcal{G}$. Da die Dimension von $T_i\mathcal{G}$ jeweils der Grad v_i des Vertex n_i ist, haben die Fasern im Gegensatz zum klassischen Fall eventuell unterschiedliche Dimensionen.
Die Dualräume zu den Räumen $T_i\mathcal{G}$ werden in natürlicher Weise über duale Paarung definiert.

Definition 4.31 (Kotangentialraum) *Sei $T_i^*\mathcal{G}$ der Dualraum zu $T_i\mathcal{G}$ mit der dualen Basis $d_{ij} : T_i\mathcal{G} \to \mathbb{C}$, $\partial_{ik} \mapsto \delta_{jk}$. $T_i^*\mathcal{G}$ heißt* Kotangentialraum von $\mathcal{G}$ an dem Vertex *n_i und $T^*G := \coprod_{i\in I} T_i^*\mathcal{G}$ heißt* Kotangentialraum von $\mathcal{G}$.

Die Dimensionen der Kotangentialräume $T_i^*\mathcal{G}$ stimmen, wie aus der linearen Algebra bekannt, mit denen der Tangentialräume $T_i\mathcal{G}$ überein. Weiterhin ist der Kotangentialraum $T^*\mathcal{G}$ genau wie der Tangentialraum $T\mathcal{G}$ ein diskretes Vektorbündel über V mit Projektion $\pi' : T^*G \to V$, $d_{ij} \mapsto n_i$.
Im folgenden und insbesondere in Kapitel 5 werden die Schnitte in dem Tangential- und Kotangentialbündel die relevanten Objekte sein.

Definition 4.32 (Schnitte) *Abbildungen $\omega : V \to T\mathcal{G}$ oder $\eta : V \to T^*\mathcal{G}$ mit $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_V$ beziehungsweise $\pi' \circ \eta = \mathrm{id}_V$ heißen* Schnitte *in $T\mathcal{G}$ beziehungsweise $T^*\mathcal{G}$. Die Menge aller Schnitte in $T\mathcal{G}$ beziehungsweise $T^*\mathcal{G}$ sei mit* $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$ *beziehungsweise* $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ *bezeichnet.*

Die Bedingungen $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_V$ und $\pi' \circ \eta = \mathrm{id}_V$ stellen sicher, daß ein Vertex n_i immer nur in den Tangentialraum beziehungsweise Kotangentialraum an diesem Vertex abgebildet wird. Die Schnitte $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$ werden über $\mathbb{C}$ von Elementarschnitten $\tilde{\partial}_{ij} : V \to T\mathcal{G}$, $n_k \mapsto \delta_{ik}\partial_{ij}$ aufgespannt. Bei einem unendlichen Graphen treten dabei im allgemeinen unendliche Summen von $\tilde{\partial}_{ij}$ auf, die jedoch im Sinne punktweiser Konvergenz von Funktionen verstanden werden können, da für ein festes $i \in I$ die Anzahl der $\tilde{\partial}_{ij}$ aufgrund der geforderten lokalen Endlichkeit von $\mathcal{G}$ endlich ist.
Analog spannen die Elementarschnitte $\tilde{d}_{ij} : V \to T^*\mathcal{G}$, $n_k \mapsto \delta_{ik} d_{ij}$ die Schnitte in $T^*\mathcal{G}$ auf. Auch hier können die auftretenden Summen im Sinne von punktweiser Konvergenz von Funktionen verstanden werden.
Wir vereinbaren wieder die folgende Notation: Falls $(i,j) \notin J$ gilt, schreiben wir dennoch ∂_{ij}, $\tilde{\partial}_{ij}$, d_{ij}, $\tilde{d}_{ij}$, obwohl es diese Elemente eigentlich nicht gibt, und setzen sie alle Null. Durch diese Vereinbarung können viele Summen über ganz I geschrieben werden, obwohl effektiv nur über gewisse Teilmengen summiert wird.
Die typischen Eigenschaften der $\tilde{\partial}_{ij}$ erhält man durch direktes Nachrechnen.

Lemma 4.33 (Eigenschaften von $\tilde{\partial}_{ij}$)

(i) $\tilde{\partial}_{ij}(\phi\psi) = (\tilde{\partial}_{ij}\phi)\psi + \phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi + \tilde{\partial}_{ij}\phi\tilde{\partial}_{ij}\psi$ *für* $\phi, \psi \in \mathcal{A}_V$,

(ii) im allgemeinen gilt $\tilde{\partial}_{ij}\tilde{\partial}_{ik} \neq \tilde{\partial}_{ik}\tilde{\partial}_{ij}$.

Beweis.

(i) Seien $\phi, \psi \in \mathcal{A}_V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{ij}(\phi\psi) &= (\phi_j\psi_j - \phi_i\psi_i)e_i \\ &= (\phi_j - \phi_i)\psi_i e_i + \phi_i(\psi_j - \psi_i)e_i + (\phi_j - \phi_i)(\psi_j - \psi_i)e_i \\ &= (\tilde{\partial}_{ij}\phi)\psi + \phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi + \tilde{\partial}_{ij}\phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi\,. \end{aligned}$$

(ii) Sei $\phi \in \mathcal{A}_V$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{ij}(\tilde{\partial}_{ik}\phi) &= \tilde{\partial}_{ij}(\phi_k - \phi_i)\,e_i = 0 - (\phi_k - \phi_i)\,e_i \\ \tilde{\partial}_{ik}(\tilde{\partial}_{ij}\phi) &= \tilde{\partial}_{ik}(\phi_j - \phi_i)\,e_i = 0 - (\phi_j - \phi_i)\,e_i\,. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind nicht gleich, wenn $\phi_k \neq \phi_j$ ist.

□

Der Effekt bei (ii) beruht darauf, daß man die diskreten Ableitungen an *einem* Vertex lokalisiert und nicht an den beiden bei der Differenz beteiligten Vertizes. Inwiefern zweite diskrete Richtungsableitungen dieser Form im Licht dieser Beobachtung überhaupt sinnvoll sind, bleibt fraglich.

Über beliebigen Moduln, also insbesondere auch über Vektorräumen, kann man eine Tensoralgebra, eine symmetrische Algebra und eine Grassmann-Algebra definieren. Wir erzeugen hier die Grassmann-Algebren $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$ über allen Kotangentialräumen $T_i^*\mathcal{G}$. Die Dimension dieser Algebren als komplexe Vektorräume ist jeweils 2^{v_i}. Daß die Dimensionen der verschiedenen $T_i^*\mathcal{G}$ unterschiedlich sind, überträgt sich demnach auf die entsprechenden Grassmann-Algebren. Definiert man $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$ zunächst abstrakt als den Quotienten der Tensor-Algebra $\bigotimes T_i^*\mathcal{G}$ nach dem von $\{\omega_i \otimes \omega_i : \omega_i \in T_i^*\mathcal{G}\}$ erzeugten Ideal, wie dies beispielsweise in [Ger] durchgeführt wird, so ist der kanonische Isomorphismus $\bigotimes T_i^*\mathcal{G} \to \mathrm{Mult}(T_i\mathcal{G})$, der durch $\omega_i^{(1)}\otimes\ldots\otimes\omega_i^{(r)}(\xi_i^{(1)},\ldots,\xi_i^{(r)}) := \omega_i^{(1)}(\xi_i^{(1)})\ldots\omega_i^{(r)}(\xi_i^{(r)})$ mit $\omega_i^{(1)},\ldots,\omega_i^{(r)}\in T_i^*\mathcal{G}$ und $\xi_i^{(1)},\ldots,\xi_i^{(r)} \in T_i\mathcal{G}$ gegeben ist, nicht eindeutig auf $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$ übertragbar. Aus diesem Grund gibt es in der Literatur zwei verschiedene Konventionen für einen Isomorphismus $\Psi_i : \Lambda T_i^*\mathcal{G} \to \mathrm{Alt}(T_i\mathcal{G})$, die sich für r-Formen um einen Faktor $r!$ unterscheiden. Wir wollen hier die gebräuchlichere Version verwenden, in der $\Psi(d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r})(\partial_{ij_1},\ldots,\partial_{ij_r}) = 1$ für $j_1 \neq \ldots \neq j_r \in \mathrm{NN}(i)$ und $r \leq v_i$ gilt. Dies ist die in [Jän], [Arn] und [For] verwendete Konvention. In der in [BiG] verwendeten Konvention ist $d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r}(\partial_{ij_1},\ldots,\partial_{ij_r}) = \frac{1}{r!}$ für $j_1 \neq \ldots \neq j_r \in \mathrm{NN}(i)$ und $r \leq v_i$. Nun lassen sich Formen $\omega_i \in \Lambda^r T_i^*\mathcal{G}$ bezüglich der Basis $\{d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r} : j_1 < \ldots < j_r \in \mathrm{NN}(i)\}$ als

$$\omega_i = \sum_{j_1<\ldots<j_r\in \mathrm{NN}(i)} \omega_{ij_1\ldots j_r} d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r}$$

mit Komponenten $\omega_{ij_1\ldots j_r} \in \mathbb{C}$ schreiben. Die Komponenten sind durch $\omega_{ij_1\ldots j_r} = \omega_i(\partial_{ij_1},\ldots,\partial_{ij_r})$ gegeben. Summiert man statt über $j_1 < \ldots < j_r$ über alle r-tupel $(j_1,\ldots,j_r)$, so erhält man $r!\,\omega_i$ als Ergebnis. Weiterhin ist $\Lambda^r T_i^*\mathcal{G} = \{0\}$ für alle $r > v_i$.
Mit den Grassmann-Algebren $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$ definieren wir das diskrete Bündel der alternierenden Differentialformen über V.

Definition 4.34 (Alternierende Differentialformen) *Für alle $i\in I$ sei $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$ die Grassmann-Algebra über $T_i^*\mathcal{G}$. Sei $\Lambda T^*\mathcal{G} := \coprod_{i\in I} \Lambda T_i^*\mathcal{G}$ und $\pi : \Lambda T^*\mathcal{G} \to V$, $\omega_i \mapsto n_i$ für $\omega_i \in \Lambda T_i^*\mathcal{G}$. Dann heißen die Elemente $\omega \in \mathrm{Sec}(\Lambda T^*\mathcal{G})$, d. h. die Schnitte in $\Lambda T^*\mathcal{G}$,* alternierende Differentialformen *auf dem Graphen $\mathcal{G}$.*

Man sieht sofort, daß sich auch die Elemente von $\mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$ wieder als

$$\omega = \sum_{\substack{i\in I \\ j_1<\ldots<j_r\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{j_1\ldots j_r} \tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r} \quad \text{mit} \quad \omega_{j_1\ldots j_r} \in \mathcal{A}_V$$

schreiben lassen. Dabei ist $(\tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r})(n_k)$ durch $(\tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r})(n_k) := \tilde{d}_{ij_1}(n_k)\wedge\ldots\wedge\tilde{d}_{ij_r}(n_k) = \delta_{ik} d_{ij_1}\wedge\ldots\wedge d_{ij_r}$ definiert. Man kann natürlich ebensogut in dem Dachprodukt alle Tilden bis auf eine weglassen, da die Multiplikation in den Schnitten eine punktweise Multiplikation wie bei gewöhnlichen Funktionen ist. Explizit heißt das, daß $(\tilde{d}_{ij} \wedge \tilde{d}_{il})(n_k) = (\tilde{d}_{ij} \wedge d_{il})(n_k) = (d_{ij} \wedge \tilde{d}_{il})(n_k) = \delta_{ik} d_{ij} \wedge d_{il}$ gilt. Im folgenden werden die Tilden dann auch ohne Kommentar

ergänzt oder weggelassen, wenn dies zu keiner Veränderung führt. An den Stellen n_i, an denen $r > v_i$ gilt, ist ω stets Null. Ist der Vertexgrad im Graphen $\mathcal{G}$ also gleichmäßig beschränkt und das Maximum des Vertexgrads über alle Vertizes $v_{\max}$, so verschwinden alle Formen aus $\Lambda^r T^*\mathcal{G}$ mit $r > v_{\max}$. In diesem Sinn hat $\mathcal{G}$ die kohomologische Dimension $v_{\max}$. Dieser Begriff erscheint aber hier nicht besonders sinnvoll, weil er von kleinen lokalen Änderungen abhängig ist und auch sonst nicht die typischen Eigenschaften von Dimensionen im Sinne von Kapitel 3 zeigt.
Weiterhin fällt auf, daß auf schwach vernetzten Graphen $\omega_{j_1\ldots j_r}$ für große r meist nur an einem Vertex nicht verschwindet, da zwei Vertizes dann in der Regel nicht r identische Nachbarn haben. Das ist aber die Voraussetzung dafür, daß $\omega_{j_1\ldots j_r}$ mit festen $j_1, \ldots, j_r$ an beiden Vertizes nicht Null ist.

Nachdem wir den Begriff des Formenbündels über einer abzählbaren Menge erklärt haben, führen wir auch hier eine äußere Ableitung d ein. Dabei kann man sich wie zuvor an der Situation in der klassischen Differentialgeometrie orientieren.

Definition 4.35 (Äußere Ableitung) *Die* äußere Ableitung $d : \mathrm{Sec}(\Lambda T^*\mathcal{G}) \to \mathrm{Sec}(\Lambda T^*\mathcal{G})$ *ist gegeben durch*

$$d \sum_{\substack{i\in I \\ j_1<\ldots<j_r \in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{j_1\ldots j_r}\, \tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r} := \sum_{\substack{i\in I,\, j_0 \in \mathrm{NN}(i) \\ j_1<\ldots<j_r \in \mathrm{NN}(i)}} \tilde{\partial}_{ij_0}\omega_{j_1\ldots j_r}\, \tilde{d}_{ij_0} \wedge \tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r} .$$

Alle Summen bis auf die über i sind aufgrund der lokalen Endlichkeit von $\mathcal{G}$ endlich. Die unendliche Summe über i wird wie immer im Sinne punktweiser Konvergenz von Funktionen verstanden.

In gewisser Weise ist dies dieselbe Definition, die auch in Kapitel 4.2 getroffen wurde, wenn man n_i mit e_i und n_{ij} mit $\tilde{d}_{ij}$ identifiziert. Denn für $\phi \in \mathcal{A}_V$ gilt

$$d\phi = \sum_{i,j\in I} \partial_{ij}\, \phi \tilde{d}_{ij} = \sum_{i,j\in I} (\phi_j - \phi_i)\tilde{d}_{ij} = \sum_{i,j\in I} \phi_i(\tilde{d}_{ji} - \tilde{d}_{ij}) ,$$

Das ist der in Kapitel 4.2 verwendete Ausdruck. Allerdings muß betont werden, daß $\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}$ und $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ als Algebren nicht isomorph sind, da in $\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}$ die Links- und die Rechtsmultiplikation unterschiedlich sind, in $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ jedoch nicht.
Als nächstes geben wir die Eigenschaften von d auf Funktionen aus $\mathcal{A}_V$ an.

Lemma 4.36 (Eigenschaften von d auf Funktionen)

(i) $d(\phi\psi) = (d\phi)\psi + \phi\, d\psi + \sum_{i,j\in I} \tilde{\partial}_{ij}\phi\, \tilde{\partial}_{ij}\psi\, \tilde{d}_{ij}$,

(ii) im allgemeinen gilt $d^2 \neq 0$.

Beweis.

(i) Seien $\phi, \psi \in \mathcal{A}_V$. Man berechnet

$$d(\phi\psi) = \sum_{i,j\in I} \tilde{\partial}_{ij}(\phi\psi)\,\tilde{d}_{ij} = \sum_{i,j\in I} \big((\tilde{\partial}_{ij}\phi)\psi + \phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi + \tilde{\partial}_{ij}\phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi\big)\,\tilde{d}_{ij}$$
$$= (d\phi)\psi + \phi\,d\psi + \sum_{i,j\in I} \tilde{\partial}_{ij}\phi\,\tilde{\partial}_{ij}\psi\,\tilde{d}_{ij}\,.$$

(ii) Sei $\phi \in \mathcal{A}_V$ beliebig. Dann erhält man

$$d^2\phi = d\sum_{i,j\in I} \tilde{\partial}_{ij}\phi\,\tilde{d}_{ij} = \sum_{\substack{i\in I\\ l,j\in \mathrm{NN}(i)}} \tilde{\partial}_{il}\big((\phi_j - \phi_i)e_i\big)\,\tilde{d}_{il} \wedge \tilde{d}_{ij}$$
$$= \sum_{\substack{i\in I\\ l,j\in \mathrm{NN}(i)}} -(\phi_j - \phi_i)e_i\,\tilde{d}_{il} \wedge \tilde{d}_{ij}\,.$$

Wertet man diesen Ausdruck beispielsweise an der Stelle n_k mit den Tangentialvektoren $\partial_{kr}, \partial_{ks} \in T_k\mathcal{G}$ aus, so erhält man

$$d^2\phi(n_k)(\partial_{kr}, \partial_{ks}) = \sum_{l,j\in \mathrm{NN}(k)} -(\phi_j - \phi_k)(d_{kl} \wedge d_{kj})(\partial_{kr}, \partial_{ks})$$
$$= \sum_{l,j\in \mathrm{NN}(k)} (\phi_k - \phi_j)(\delta_{lr}\delta_{js} - \delta_{jr}\delta_{ls})$$
$$= \phi_k - \phi_s - \phi_k + \phi_r = \phi_r - \phi_s \neq 0 \quad \text{für} \quad \phi_r \neq \phi_s\,.$$

$\square$

Vergleicht man wieder mit Abschnitt 4.2, so sieht man, daß die Rechtsmultiplikation in $\mathcal{C}^1_{\mathcal{G}}$ gerade den zusätzlichen Term in (i) mit umgekehrtem Vorzeichen erzeugt, wenn man dort ϕ mit n_{ij} vertauscht. Deshalb gilt in 4.2 wie gesehen die Leibnizregel, hier aber nicht.

Bei genauerer Betrachtung der äußeren Ableitung auf r-Formen mit $r > 0$ beobachtet man, daß je nach Stärke der Vernetzung eines Graphen die äußere Ableitung auf Formen höheren Grades eine in gewisser Weise triviale Wirkung hat. Nehmen wir zur Illustration das Beispiel einer 1-Form $\omega \in \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ auf einem schwach vernetzten Graphen. Die äußere Ableitung

$$d\omega = d\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j_1\in \mathrm{NN}(i)}} \omega_{j_1}\tilde{d}_{ij_1}\Big) = \sum_{\substack{i\in I\\ j_0,j_1\in \mathrm{NN}(i)}} \tilde{\partial}_{ij_0}\omega_{j_1}\tilde{d}_{ij_0} \wedge \tilde{d}_{ij_1}$$

kann nur dann von

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j_0,j_1\in \mathrm{NN}(i)}} -\omega_{j_1}\tilde{d}_{ij_0} \wedge \tilde{d}_{ij_1} = \sum_{\substack{i\in I\\ j_0<j_1\in \mathrm{NN}(i)}} (\omega_{j_0} - \omega_{j_1})\tilde{d}_{ij_0} \wedge \tilde{d}_{ij_1} \tag{4.5}$$

abweichen, wenn zwei Vertizes n_i, n_{j_0} einen gemeinsamen Nachbarn n_{j_1} besitzen. Bei vielen Graphen ist das jedoch nie der Fall. Ein Beispiel hierfür sind die kubischen Gitter.
In dem Ausdruck (4.5) fließen an jeder Stelle nur Werte an *einem* Vertex ein. Das bedeutet, daß aus solchen Ausdrücken gewonnene Gleichungen wie etwa die Euler-Lagrange-Gleichungen in Kapitel 5 nicht besonders interessant sind, weil sie keine Wechselwirkungen zwischen Feldstärken an verschiedenen Vertizes beschreiben.
Bei allgemeinen r-Formen ist die Bedingung für Nichttrivialität in diesem Sinn, daß es benachbarte Vertizes gibt, die r gemeinsame Nachbarn haben. Da kubische Gitter diese Eigenschaft für kein $r > 0$ besitzen, sind sie für diesen Differentialkalkül und für Formen vom Grad größer Null nicht die geeigneten Spezialfälle wie sie dies für die anderen Kalküle sind. Für Theorien, die 1-Formen verwenden, sind in diesem Kalkül beispielsweise Triangulationen oder das gleichmäßige zweidimensionale Dreiecksgitter die geeigneten Graphen, um an Spezialfällen die Aussagen der Formulierung einer Theorie auf Graphen zu testen.

Die äußere Ableitung hat hier trotz ihrer formalen Ähnlichkeit zu der im Kontinuum eine grundlegend andere Wirkung. Nimmt man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M, betrachtet eine lokale Trivialisierung von M, nähert diese durch ein kubisches Gitter und betrachtet etwa 1-Formen auf diesem Gitter, dann stellen die in offensichtlicher Weise als Differenzenquotienten auf das Gitter übertragenen partiellen Ableitung in der lokalen Trivialisierung Zusammenhänge zwischen den Komponenten derjenigen 1-Formen her, die *parallelen* Kanten des Gitters an benachbarten Vertizes entsprechen. Den in diesem Rahmen selbstverständlichen Begriff der Parallelität hat man auf allgemeinen Graphen jedoch nicht. Die diskreten partiellen Ableitungen stellen hier stattdessen Zusammenhänge zwischen den Komponenten von 1-Formen her, die zu Kanten korrespondieren, die *an demselben Vertex enden.*
Die äußere Ableitung im Kontinuum enthält also schon einen Parallelitätsbegriff oder Paralleltransport. Dies sieht man auch daran, daß in der klassischen Differentialgeometrie die äußere Ableitung auf trivialen Bündeln schon ein linearer Zusammenhang ist und damit einen Paralleltransport definiert. Auf beliebigen Graphen hingegen hat man keinen solchen kanonischen Zusammenhang. Darüber hinaus fällt die Definition eines solchen Zusammenhangs oder, äquivalent dazu, eines Paralleltransports auf beliebigen symmetrischen Digraphen schwer. Beschränkt man sich aber auf homogene symmetrische Digraphen, so läßt sich der Begriff eines Paralleltransports definieren.

Definition 4.37 (Paralleltransport entlang Kanten) *Sei $\mathcal{G}$ ein homogener, symmetrischer Digraph. Ein* Paralleltransport γ_{ij} *entlang der Kante n_{ij} ist ein Isomorphismus $\gamma_{ij} : T_i^*\mathcal{G} \to T_j^*\mathcal{G}$, $d_{ik} \mapsto \sum_{l \in \mathrm{NN}(j)} \gamma_{ijkl} d_{jl}$. Ersetzt man d_{ik} durch $\tilde{d}_{ij}$ und d_{jl} durch $\tilde{d}_{jl}$, so kann man γ_{ij} auch als Endomorphismus von* $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$

ansehen.

Als Isomorphismus zwischen Vektorräumen hat γ_{ij} auch ein Inverses, das wir mit γ_{ij}^{-1} bezeichnen und das gemäß $\gamma_{ij}^{-1}(d_{jl}) = \sum_{k\in \mathrm{NN}(i)} \gamma_{ijlk}^{-1} d_{ik}$ wirkt. γ_{ij} induziert in natürlicher Weise auch einen Isomorphismus zwischen den höheren Formen,

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} : \Lambda^r T_i^* \mathcal{G} &\to \Lambda^r T_j^* \mathcal{G} \\ d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r} &\mapsto \sum_{k_1,\ldots,k_r \in \mathrm{NN}(j)} \gamma_{ijj_1k_1} \ldots \gamma_{ijj_rk_r} d_{ik_1} \wedge \ldots \wedge d_{ik_r} \,. \end{aligned}$$

Mit diesem Begriff des Paralleltransports entlang Kanten läßt sich eine kovariante Ableitung definieren.

Definition 4.38 (Kovariante Ableitung) *Sei auf einem homogenen, symmetrischen Digraphen $\mathcal{G}$ für alle $n_{ij} \in E$ ein Paralleltransport γ_{ij} definiert. Dann ist die* kovariante Ableitung *durch*

$$\begin{aligned} &D : \Lambda^r T^* \mathcal{G} \to \Lambda^{r+1} T^* \mathcal{G} \\ &D\omega := \sum_{\substack{i\in I \\ j_0 \in \mathrm{NN}(i) \\ j_1 < \ldots < j_r \in \mathrm{NN}(i)}} \big((\gamma_{ij_0}^{-1} \omega(n_{j_0}))_{ij_1\ldots j_r} - \omega_{ij_1\ldots j_r} \big) \tilde{d}_{ij_0} \wedge \tilde{d}_{ij_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{ij_r} \end{aligned}$$

definiert.

Mit der kovarianten Ableitung hat man ein eventuell nützlicheres Äquivalent der äußeren Ableitung in der klassischen Differentialgeometrie. Man hat aber bei entsprechender Wahl des Paralleltransports auch ein Analogon einer kovarianten Ableitung.

Bis zu dieser Stelle haben wir im wesentlichen den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu imitieren versucht. Jetzt soll auch der Begriff einer Metrik im Sinne der Riemannschen Metrik auf (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten eingeführt werden. Wir definieren Skalarprodukte in den Vektorräumen $T_i\mathcal{G}$ und damit auch in kanonischer Weise in $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$.

Definition 4.39 (Metrik) *Für alle $i \in I$ sei $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_i : T_i\mathcal{G} \times T_i\mathcal{G} \to \mathbb{C}$ eine nichtentartete, hermitesche Sesquilinearform auf dem Vektorraum $T_i\mathcal{G}$. Die Werte $\langle \partial_{ij}, \partial_{ik} \rangle$ seien reell. Dann ist das* Skalarprodukt *oder die* Metrik *auf den Schnitten* $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$ *gegeben durch $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathrm{Sec}(T\mathcal{G}) \times \mathrm{Sec}(T\mathcal{G}) \to \mathcal{A}_V$, $\langle \omega, \eta \rangle (n_i) := \langle \omega(n_i), \eta(n_i) \rangle_i$.*

Hat man die Metrik auf den Tangentialräumen $T_i\mathcal{G}$ festgelegt, so kann man sie mit Hilfe eines kanonischen Mechanismus auch auf $T_i^*\mathcal{G}$ und das gesamte Formenbündel $\Lambda T^*\mathcal{G}$ übertragen. Wir führen dies nun detailiert aus.

Die Metrik $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_i$ induziert zwischen allen $T_i\mathcal{G}$ und $T_i^*\mathcal{G}$ und somit auch zwischen $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$ und $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ Isomorphismen $\Phi_i : T_i\mathcal{G} \to T_i^*\mathcal{G}$, $\omega_i \mapsto \langle \omega_i, \cdot \rangle_i$, beziehungsweise $\Phi : \mathrm{Sec}(T\mathcal{G}) \to \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$, $\omega \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle$. Φ_i beziehungsweise Φ sind Isomorphismen, weil $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht entartet sind.

Für die Praxis ist es nützlich, $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ in Komponenten bezüglich der Basis $\{\partial_{ij} : j \in \mathrm{NN}(i)\}$ darzustellen. Wir definieren also $g_{ijk} := \langle \partial_{ij}, \partial_{ik} \rangle_i$ für $j, k \in \mathrm{NN}(i)$. Dann sind die so definierten g_{ijk} für jedes i die Komponenten einer reellen $v_i \times v_i$ Matrix mit maximalem Rang. Da g_i die darstellende Matrix einer hermiteschen Sesquilinearform ist, ist diese Matrix sogar symmetrisch. Man muß jedoch darauf achten, daß $\mathrm{NN}(i)$ im allgemeinen nicht $\{1, \dots, v_i\}$ ist und demnach die Reihen und Spalten der Matrizen g_i nicht wie üblich durch $\{1, \dots, v_i\}$ numeriert werden.

Für die Schnitte in $T\mathcal{G}$ definieren wir $\tilde{g}_{ijk} : V \to \mathbb{R}$, $n_l \mapsto \delta_{il} g_{ijk}$ und erhalten $\tilde{g}_{ijk} = \langle \tilde{\partial}_{ij}, \tilde{\partial}_{ik} \rangle$. Falls $i \neq l$ gilt, ist $\langle \tilde{\partial}_{ij}, \tilde{\partial}_{lk} \rangle = 0$, weil $\tilde{\partial}_{ij}$ und $\tilde{\partial}_{lk}$ als Schnitte disjunkte Träger haben. Ebenso gilt $\langle \tilde{\partial}_{ij}, \tilde{\partial}_{lk} \rangle = 0$, falls eines der beiden Argumente Null ist. Somit erhält auch $\tilde{g}_{ijk}$ die Eigenschaft, daß $\tilde{g}_{ijk} = 0$ gilt, falls $j \notin \mathrm{NN}(i)$ oder $k \notin \mathrm{NN}(i)$ ist. Mit diesen Definitionen folgt

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{\substack{i \in I \\ j,k \in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij}}\, \eta_{ik}\, \tilde{g}_{ijk} \,.$$

Die Isomorphismen Φ_i wirken auf die Elemente ∂_{ij} gemäß

$$\Phi_i(\partial_{ij}) = \langle \partial_{ij}, \cdot \rangle_i = \sum_{k \in \mathrm{NN}(i)} \langle \partial_{ij}, \partial_{ik} \rangle_i d_{ik} = \sum_{k \in \mathrm{NN}(i)} g_{ijk} d_{ik} \,.$$

Dies ist die Matrix-Vektor-Multiplikation der Matrix $(g_i)_{jk}$ mit dem Vektor $(d_i)_k$. Auf beliebigen Elementen $\xi_i \in T_i\mathcal{G}$ erhält man $\Phi_i(\xi_i) = \sum_{j,k \in \mathrm{NN}(i)} \overline{\xi_{ij}} g_{ijk} d_{ik}$. Die Umkehrabbildung Φ_i^{-1} wird durch

$$\Phi_i^{-1}(d_{ij}) = \sum_{k \in \mathrm{NN}(i)} g_{ijk}^{-1} \partial_{ik}$$

gegeben, wobei g_{ijk}^{-1} die Komponenten der zu g_i inversen Matrix bezeichnet. Damit ist die Wirkung auf beliebige Elemente $\omega_i \in T_i^*\mathcal{G}$ gerade $\Phi_i^{-1}(\omega_i) = \sum_{j,k \in \mathrm{NN}(i)} \overline{\omega_{ij}} g_{ijk}^{-1} \partial_{ik}$. Für die Schnitte verwendet man $\tilde{g}_{ijk}^{-1} : V \to \mathbb{R}$, $n_i \mapsto g_{ijk}^{-1}$ und erhält entsprechende Ausdrücke für die Wirkung von Φ.
Schließlich überträgt man mit Φ auch das Skalarprodukt auf $T_i^*\mathcal{G}$ und $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$.

Definition 4.40 (Skalarprodukt in $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$) *Wir definieren das* Skalarprodukt *oder die* Metrik *in* $T_i^*\mathcal{G}$ *und* $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ *durch*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_i^* : T_i^*\mathcal{G} \times T_i^*\mathcal{G} &\to \mathbb{C} \\ (\omega_i, \eta_i) &\mapsto \overline{\langle \Phi_i^{-1}\omega_i, \Phi_i^{-1}\eta_i \rangle_i} \end{aligned} \quad \textit{und} \quad \begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle^* : \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G}) \times \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G}) &\to \mathcal{A}_V \\ (\omega, \eta) &\mapsto \overline{\langle \Phi^{-1}\omega, \Phi^{-1}\eta \rangle} \,. \end{aligned}$$

Dabei deutet der $*$ an der Klammer an, daß das Skalarprodukt auf dem *Kotangentialraum* definiert ist. Für die Elementarschnitte $\tilde{d}_{ij}$ ergibt diese Definition

$$\begin{aligned}\langle \tilde{d}_{ij}, \tilde{d}_{il}\rangle^* &= \Big\langle \sum_{k\in \mathrm{NN}(i)} \tilde{g}^{-1}_{ijk}\tilde{\partial}_{ik}, \sum_{r\in \mathrm{NN}(i)} \tilde{g}^{-1}_{ilr}\tilde{\partial}_{ir}\Big\rangle \\ &= \sum_{k,r\in \mathrm{NN}(i)} \tilde{g}^{-1}_{ijk}\,\tilde{g}_{ikr}\,\tilde{g}^{-1}_{ilr} = \sum_{r\in \mathrm{NN}(i)} \delta_{jr}\,\tilde{g}^{-1}_{ilr} = \tilde{g}^{-1}_{ilj}\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie der g_i kann man das Ergebnis auch als $\tilde{g}^{-1}_{ijl}$ schreiben. Somit hat man für beliebige Formen $\omega, \eta \in \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$

$$\langle \omega, \eta\rangle^* = \Big\langle \sum_{i,j\in I} \omega_{ij}\tilde{d}_{ij}, \sum_{l,k\in I} \eta_{lk}\tilde{d}_{lk}\Big\rangle^* = \sum_{i,j,k\in I} \overline{\omega_{ij}}\,\eta_{ik}\,\tilde{g}^{-1}_{ijk}\,.$$

Jetzt übertragen wir die Metrik schließlich auch auf das Formenbündel. Die Beweise und nähere Einzelheiten der im folgenden verwendeten Aussagen aus der linearen Algebra sind in der Literatur zur linearen Algebra oder auch in [Jän, S. 216ff] zu finden. Zunächst einmal ist $\Lambda^r T^*_i\mathcal{G}$ wie schon erwähnt isomorph zu $\mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})$, den alternierenden Multilinearformen r-ter Stufe auf $T_i\mathcal{G}$. Sei $\omega^{(1)}_i, \ldots, \omega^{(r)}_i \in T^*_i\mathcal{G}$ und $\xi^{(1)}_i, \ldots, \xi^{(r)}_i \in T_i\mathcal{G}$. Der Isomorphismus ist durch

$$\begin{aligned}&\Psi_i : \Lambda^r T^*_i\mathcal{G} \to \mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})\\ &\Psi_i(\omega^{(1)}_i \wedge \ldots \wedge \omega^{(r)}_i)(\xi^{(1)}_i, \ldots, \xi^{(r)}_i)\\ &\quad := \sum_{\sigma\in\Sigma_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{(1)}_i(\xi^{\sigma(1)}_i)\ldots\omega^{(r)}_i(\xi^{\sigma(r)}_i)\end{aligned}$$

gegeben. Dieser Isomorphismus induziert in natürlicher Weise einen Isomorphismus Ψ auf den Schnitten $\mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$ durch punktweise Anwendung der einzelnen Isomorphismen Ψ_i in $\Lambda^r T^*_i\mathcal{G}$. Man sieht, daß die Komponenten $\omega_{ij_1\ldots j_r}$ eines Elementes $\omega_i \in \Lambda^r T^*_i\mathcal{G}$ bezüglich der Basis $\{d_{ij_1} \wedge \ldots \wedge d_{ij_r} : j_1 < \ldots < j_r \in \mathrm{NN}(i)\}$ gerade $\omega_{ij_1\ldots j_r} = \Psi_i(\omega_i)(\partial_{ij_1}, \ldots, \partial_{ij_r})$ sind. Entsprechend gilt für $\omega \in \mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$, daß $\omega_{j_1\ldots j_r}(n_i) = \Psi(\omega)(\tilde{\partial}_{ij_1}, \ldots, \tilde{\partial}_{ij_r})(n_i)$ ist. Weiterhin gibt es Isomorphismen

$$\begin{aligned}&\Theta_i : \mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G}) \to (\Lambda^r T^*_i\mathcal{G})^*\\ &\Theta_i(\omega_i)(\eta^{(1)}_i \wedge \ldots \wedge \eta^{(r)}_i) := \omega_i(\Phi^{-1}_i\eta^{(1)}_i, \ldots, \Phi^{-1}_i\eta^{(r)}_i)\end{aligned}$$

für $\omega_i \in \mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})$ und $\eta^{(1)}_i, \ldots, \eta^{(r)}_i \in T^*_i\mathcal{G}$. Auch hier gibt es eine Übertragung auf $\Theta : \mathrm{Sec}(\mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})) \to \mathrm{Sec}((\Lambda^r T^*\mathcal{G})^*)$ durch punktweises Anwenden der einzelnen Isomorphismen Θ_i. Insgesamt hat man also einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}&\Theta\circ\Psi : \mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G}) \to \mathrm{Sec}((\Lambda^r T^*\mathcal{G})^*)\\ &\Theta\circ\Psi(\omega^{(1)} \wedge \ldots \wedge \omega^{(r)})(\eta^{(1)} \wedge \ldots \wedge \eta^{(r)})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{(1)}(\Phi^{-1}\eta^{\sigma(1)})\ldots\omega^{(r)}(\eta^{\sigma(r)})\,.$$

Dieser Isomorphismus entspricht dem Hoch- und Herunterziehen von Indizes, das man aus dem Ricci-Kalkül der klassischen Differentialgeometrie kennt. Man kann ihn nun verwenden, um auf höheren r-Formen mit $r > 1$ ein Skalarprodukt beziehungsweise eine Metrik zu definieren.

Definition 4.41 (Metrik auf r-Formen) *Die Metrik für $\omega, \eta \in \mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$ ist durch $\langle\omega,\eta\rangle^* := \overline{\Theta\circ\Psi(\omega)(\eta)}$ gegeben.*

Für die Elemente von $\mathrm{Sec}(\Lambda^1 T^*\mathcal{G}) = \mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$ stimmt dies gerade mit der Definition 4.40 überein. Man kann diese Metrik auch in den Komponenten bezüglich der Basis $\{\tilde{d}_{ij_1}\wedge\ldots\wedge\tilde{d}_{ij_r} : j_1 < \ldots < j_r \in \mathrm{NN}(i)\}$ von $\mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$ ausrechnen.

Lemma 4.42 *In Komponenten ist die Metrik von*

$$\omega = \sum_{\substack{i\in I\\ j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)}} \omega_{j_1\ldots j_r}\tilde{d}_{ij_1}\wedge\ldots\wedge\tilde{d}_{ij_r} \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{\substack{i\in I\\ l_1<\ldots<l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \eta_{l_1\ldots l_r}\tilde{d}_{il_1}\wedge\ldots\wedge\tilde{d}_{il_r}$$

durch

$$\langle\omega,\eta\rangle^*(n_i) = \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1\neq\ldots\neq l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\,g^{-1}_{il_1j_1}\cdots g^{-1}_{il_rj_r}$$

gegeben.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle\omega,\eta\rangle^*(n_i) &= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1<\ldots<l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\langle d_{ij_1}\wedge\ldots\wedge d_{ij_r}, d_{il_1}\wedge\ldots\wedge d_{il_r}\rangle^*_i \\
&= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1<\ldots<l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\sum_{\sigma\in\Sigma_r}\mathrm{sgn}(\sigma)d_{ij_1}(\Phi_i^{-1}d_{i\sigma(l_1)})\ldots d_{ij_r}(\Phi_i^{-1}d_{i\sigma(l_r)}) \\
&= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1<\ldots<l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\sum_{\sigma\in\Sigma_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{k_1\in\mathrm{NN}(i)} d_{ij_1}(g^{-1}_{i\sigma(l_1)k_1}\partial_{ik_1})\ldots\sum_{k_r\in\mathrm{NN}(i)} d_{ij_r}(g^{-1}_{i\sigma(l_r)k_r}\partial_{ik_r}) \\
&= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1<\ldots<l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\sum_{\sigma\in\Sigma_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\,g^{-1}_{i\sigma(l_1)j_1}\cdots g^{-1}_{i\sigma(l_r)j_r} \\
&= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_r\in\mathrm{NN}(i)\\ l_1\neq\ldots\neq l_r\in\mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1\ldots j_r}}\,\eta_{il_1\ldots l_r}\,g^{-1}_{il_1j_1}\cdots g^{-1}_{il_rj_r}\,.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden die Summationen über $l_1 < \ldots < l_r$ und über $\sigma \in \Sigma_r$ zu der Summation über $l_1 \neq \ldots \neq l_r$ zusammengefaßt. Dies ist möglich, da $\eta_{il_1 \ldots l_r}$ total antisymmetrisch in $l_1, \ldots, l_r$ und das Produkt der $g^{-1}_{il_1 j_1}$ total symmetrisch in $l_1, \ldots, l_r$ sind. Somit hebt die Antisymmetrie der $\omega_{ij_1 \ldots j_r}$ sich mit dem $\mathrm{sgn}(\sigma)$ weg und wir erhalten das Ergebnis. □

Damit ist die Übertragung der Metrik auf das Formenbündel abgeschlossen.

Es zeigt sich, daß man bezüglich der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ keinen zu d adjungierten Operator definieren kann. Das liegt daran, daß der Ausdruck

$$\langle \omega, d\eta \rangle^*(n_i) = \sum_{\substack{j_1 \neq \ldots \neq j_r \in \mathrm{NN}(i) \\ l_1 < \ldots < l_r \in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij_1 \ldots j_r}} \, (\eta_{l_1 l_2 \ldots l_r} - \eta_{il_2 \ldots l_r}) \, g^{-1}_{il_1 j_1} \cdots g^{-1}_{il_r j_r}$$

auch die Komponenten $\eta_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ mit $l_1 \neq i$ enthält und somit nicht als lokales Skalarprodukt $\langle \tau, \eta \rangle^*(n_i)$ geschrieben werden kann. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Problem wieder die Bilokalität der diskreten Ableitung, die durch die Definitionen künstlich umgangen wurde.

Beschränkt man sich auf positiv definite Metriken, kann man auch hier Hilberträume $\mathcal{H}_r$ mit einem globalen l^2-Skalarprodukt $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ einführen. Bezüglich dieses Skalarproduktes läßt sich d^* wie in der klassischen Differentialgeometrie bilden.

Definition 4.43 (Hilberträume $\mathcal{H}_r$ und l^2- Skalarprodukt) *Die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ sei an allen Vertizes n_i positiv definit. Wir definieren $\mathcal{H}_r := \{\omega \in \Lambda^r T^* \mathcal{G} : \sum_{i \in I} \langle \omega, \omega \rangle^*(n_i) < \infty\}$. Weiterhin sei das Skalarprodukt auf den Hilberträumen $\mathcal{H}_r$ gegeben durch $\langle\!\langle \omega, \eta \rangle\!\rangle := \sum_{i \in I} \langle \omega, \eta \rangle^*(n_i)$ für $\omega, \eta \in \mathcal{H}_r$.*

Definition 4.44 (Adjungierter Operator d^* zu d) *Der* adjungierte Operator *$d^* : \mathcal{H}_r \to \mathcal{H}_{r-1}$ zu d bezüglich des Skalarprodukts $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ist definiert durch die Beziehung $\langle\!\langle d^*\omega, \eta \rangle\!\rangle := \langle\!\langle \omega, d\eta \rangle\!\rangle$ und $d^* \mathcal{H}_0 = 0$.*

Man kann die Wirkung von d^* auf $\mathcal{H}_1$ direkt ausrechnen.

Lemma 4.45 (Wirkung von d^* auf $\mathcal{H}_1$) *Auf $\omega \in \mathcal{H}_1 \subset T^* \mathcal{G}$ wirkt d^* gemäß*

$$d^* \omega = \sum_{\substack{i \in I \\ j,k \in \mathrm{NN}(i)}} (\omega_{kj} g^{-1}_{kji} - \omega_{ij} g^{-1}_{ijk}) \, e_i \quad \text{für} \quad \omega = \sum_{i,j \in I} \omega_{ij} \, \tilde{d}_{ij}$$

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{H}_1$, $\omega = \sum_{i,j \in I} \omega_{ij} \tilde{d}_{ij}$ und $\phi \in \mathcal{H}_0$, $\phi = \sum_{i \in I} \phi_i e_i$. Dann gilt

$$\langle\!\langle \omega, d\phi \rangle\!\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \sum_{i,j \in I} \omega_{ij} \tilde{d}_{ij}, \sum_{l,k \in I} (\phi_k - \phi_l) \tilde{d}_{lk} \right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{\substack{i \in I \\ j,k \in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij}} (\phi_k - \phi_i) g^{-1}_{ijk}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k\in I\\ i,j\in \mathrm{NN}(k)}} \overline{\omega_{ij}}\phi_k g^{-1}_{ijk} - \sum_{\substack{i\in I\\ j,k\in \mathrm{NN}(i)}} \overline{\omega_{ij}}\phi_i g^{-1}_{ijk} = \sum_{\substack{i\in I\\ j,k\in \mathrm{NN}(i)}} (\overline{\omega_{kj}} g^{-1}_{kji} - \overline{\omega_{ij}} g^{-1}_{ijk})\, \phi_i \\
&= \left\langle\!\!\left\langle \sum_{\substack{i\in I\\ j,k\in \mathrm{NN}(i)}} (\omega_{kj} g^{-1}_{kji} - \omega_{ij} g^{-1}_{ijk})\, e_i,\ \phi \right\rangle\!\!\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad d^*\omega = \sum_{\substack{i\in I\\ j,k\in \mathrm{NN}(i)}} (\omega_{kj} g^{-1}_{kji} - \omega_{ij} g^{-1}_{ijk})\, e_i$$

□

Auch hier sieht man, daß im Ergebnis Werte von ω und g an verschiedenen Vertizes kombiniert sind und daß das Ergebnis somit nicht mehr lokal an einem Vertex definiert ist. Das ist konsistent mit der Beobachtung, daß auch d selbst schon Werte an benachbarten Vertizes miteinander kombiniert. In dem Spezialfall, daß $g^{-1}_{kji} = \delta_{ji}$ und dementsprechend $g^{-1}_{ijk} = \delta_{jk}$ für alle i, j und k gilt, hat man

$$d^*\omega = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} (\omega_{ji} - \omega_{ij})\, e_i\,.$$

Schließlich definiert man den Laplace-Beltrami-Operator Δ.

Definition 4.46 (Laplace-Beltrami-Operator) *Der* Laplace-Beltrami-Operator *sei durch* $\Delta := -\frac{1}{2}(dd^* + d^*d)$ *gegeben.*

Auf den Funktionen $\phi\in\mathcal{H}_0$ und den oben genannten speziellen Metrikkomponenten erhält man als Wirkung des Laplace-Beltrami-Operators genau das Analogon des in Kapitel 4.2 definierten Laplace-Operators zurück.

Lemma 4.47 (Wirkung von Δ auf $\phi \in \mathcal{H}_0$) *Auf Funktionen $\phi\in\mathcal{H}_0$ wirkt der Laplace-Beltrami-Operator Δ, wenn $g^{-1}_{ijk} = \delta_{jk}$ für $i \in I$ und $j, k \in \mathrm{NN}(i)$ gilt, gemäß*

$$\Delta\phi = \sum_{i\in I} \Bigl(\sum_{j\in \mathrm{NN}(i)} \phi_j - v_i\phi_i \Bigr)\,.$$

Beweis. Direktes Ausrechnen liefert

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,(dd^* + d^*d)\,\phi &= -\frac{1}{2} d^* \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} (\phi_j - \phi_i)\, \tilde{d}_{ij} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i\in I\\ j\in \mathrm{NN}(i)}} (\phi_i - \phi_j - \phi_j + \phi_i)\, e_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in \mathrm{NN}(i)} \phi_j - v_i \phi_i \Big) e_i \,.$$

□

Man könnte nun, wie in der Physik üblich, einen Ricci-Kalkül mit oberen und unteren Indizes und Summenkonvention einführen. Wir wollen davon aber Abstand nehmen, um stets maximale Kontrolle über die Summationsbereiche zu haben, die im Gegensatz zur klassischen Situation nicht mehr selbstverständlich sein müssen.

4.4 Diskussion

In den Abschnitten 4.1, 4.2 und 4.3 haben wir drei verschiedene Ansätze, differentialgeometrische Konzepte auf abzählbare Mengen bzw. Graphen zu übertragen, dargestellt. Die drei Ansätze haben verschiedene Ausgangspunkte und in gewisser Weise auch unterschiedliche Zielsetzungen.

In dem Zugang von Dimakis und Müller-Hoissen in Abschnitt 4.1 wurde das Konzept der nichtkommutativen Geometrie von Alain Connes auf den Spezialfall der Algebra der Funktionen auf einer abzählbaren Menge angewendet. Als Resultat dieses Vorgehens hat man die vollständige algebraische Struktur des allgemeinen Ansatzes, insbesondere eine Differentialalgebra und somit eine de-Rham Kohomologiesequenz. Wir konnten andererseits aber auch eine konkrete Interpretation des Differentialkalküls erster Ordnung als Digraph angeben. Dies ist eine der Besonderheiten des Spezialfalls der Funktionenalgebra auf abzählbaren Mengen. Weiterhin ergab die Behandlung des Differentialkalküls mit rein algebraischen Methoden aus technischen Gründen eine Einschränkung auf Differentialkalküle, die zu *lokal endlichen* Digraphen gehören.
Die höheren Stufen der graduierten Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}_V$ sind der sich zunächst anbietenden Interpretation als Wege in dem zugehörigen Digraphen $\mathcal{G}$ nicht zugänglich. Eine andere einfache Interpretation ist uns jedoch nicht bekannt. Die Interpretation des Verschwindens höherer Formen in reduzierten Differentialkalkülen als Hinweis auf einen kohomologischen Dimensionsbegriff wird durch die uns bekannten Beispiele nicht erhärtet. Schließlich liefern die Spezialfälle gerichteter und symmetrischer kubischer Gitter die bekannten Gitterkalküle zurück.

Der Zugang von Requardt in Abschnitt 4.2 folgt einer anderen Strategie. In diesem Zugang geht es von Anfang an darum, lokal endliche symmetrische Digraphen mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen. Die lokale Endlichkeit und die Symmetrie des Graphen sind dabei physikalisch motiviert. Die verwendeten Konzepte sind verschiedenen Bereichen der Mathematik entlehnt, etwa der zyklischen Kohomologie, aber auch der klassischen Differentialgeometrie. Der resultierende Differentialkalkül weist große Ähnlichkeit mit dem von Dimakis und

Müller-Hoissen entwickelten auf, insbesondere wenn man bedenkt, daß dort ein ganz anderer Ausgangspunkt gewählt wurde. Dieses Resultat deutet darauf hin, daß die erwünschten Eigenschaften des Differentialkalküls die Auswahl der zu definierenden Strukturen schon stark einschränken. Die wesentlichen Unterschiede zu dem zuerst erläuterten Zugang bestehen darin, daß hier die Relation $d^2 = 0$ im allgemeinen nicht mehr gilt, dafür aber der Differentialkalkül zu allen Ordnungen konkret interpretierbar ist. Die r-Formen werden als Summen von Wegen der Länge r interpretiert und die äußere Ableitung entspricht dann dem Einfügen von Vertizes in diese Wege. Weiterhin haben wir gesehen, daß nur auf Graphen, deren Zusammenhangskomponenten Simplizes sind, die Relation $d^2 = 0$ erhalten bleibt. Man kann also den "trade-off" zwischen Erhalt der mathematischen Struktur und der Maximierung der Interpretierbarkeit nicht durch eine geschickte Eingrenzung der Klasse der betrachteten Graphen vermeiden.

Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Variante eines Differentialkalküls auf lokal endlichen symmetrischen Digraphen verschiebt nun das Gleichgewicht endgültig zu Gunsten der direkten Übertragung bekannter Strukturen aus der klassischen Differentialgeometrie unter Verlust einiger der dort geltenden Relationen. Sowohl die Leibnizregel als auch die Relation $d^2 = 0$ gehen in diesem Ansatz verloren. Man hat dafür wieder ein, wenn auch diskretes, Tangential- und Kotangentialbündel und die Tangentialvektoren wirken als diskrete Richtungsableitungen auf Funktionen. Weiterhin läßt sich auf Funktionen auch der Laplace-Beltrami-Operator mit Hilfe der äußeren Ableitung problemlos definieren und zeigt im Spezialfall des Gitters das erwartete Verhalten. Auf höheren Formen jedoch ist zumindest der Spezialfall kubischer Gitter kritisch, da dort die äußere Ableitung wie erläutert trivial wirkt. Dies deutet darauf hin, daß der hier als äußere Ableitung eingeführte Begriff nicht in allen Zusammenhängen das richtige Konzept ist. Zusätzlich wurde deshalb auch der Begriff einer kovarianten Ableitung zu einem Paralleltransport entwickelt. Mit diesem ist es wieder möglich, die bekannten Gitterkalküle zu erhalten.

Es gibt über diese drei Ansätze hinaus auch noch weitere Ideen. In [Req4] wurde erläutert, daß auch das Auffassen eines Graphen als abstrakten simplizialen Komplex einen weiteren Zugang ermöglicht. Dieser erlaubt dann wieder die Relation $d^2 = 0$ für den zugehörigen Ko-Randoperator d.

Die Frage, welcher der vorgestellten Kalküle nun der am besten geeignete zur Beschreibung der Physik in einer diskreten Raumzeit ist, die in einer geeigneten Weise durch einen lokal endlichen symmetrischen Digraphen beschrieben wird, erscheint uns als bisher vollständig offen. In Kapitel 5 wird der Ansatz aus Abschnitt 4.3 verwendet, weil mit diesem Konzept die Übertragung der Begriffe der klassischen Feldtheorie am direktesten möglich ist. Allerdings deuten die auftretenden Probleme im Zusammenhang mit der äußeren Ableitung auf höheren Formen schon darauf hin, daß bei einer solchen Wahl eine gewisse Vorsicht geboten ist.

Es ist sicherlich ein lohnendes Ziel, auch in den anderen Ansätzen weitere Konzepte zu entwickeln. Für den Ansatz in Abschnitt 4.1 sind schon viele weitere Ergebnisse publiziert [DMH, DMH2].

Schließlich sollte noch angemerkt werden, daß die Ansätze aus Abschnitt 4.2 und 4.3, vor allem der Ansatz aus Abschnitt 4.3, speziell auf lokal endliche symmetrische Digraphen zugeschnitten sind. Sie sind im wesentlichen nur deshalb möglich, weil Graphen noch eine ausgeprägte lokale Struktur tragen und in diesem Sinn nur mild nichtkommutativ sind.

Kapitel 5

Klassische Feldtheorie auf Graphen und Netzwerken

Der in Abschnitt 4.3 konstruierte Differentialkalkül wird in diesem Kapitel verwendet, um die klassische Feldtheorie auf Graphen zu übertragen. Dabei versucht man, eine möglichst gute Korrespondenz der Begriffe und Methoden zu erreichen. Insbesondere erhofft man sich natürlich Übereinstimmungen mit dem Kontinuum in den Spezialfällen, in denen ein Kontinuumslimes möglich ist. In Abschnitt 5.1 geben wir zunächst eine kurze Zusammenfassung des Euler-Lagrange-Formalismus der klassischen Feldtheorie. Dieser wird dann in Abschnitt 5.2 auf den diskreten Differentialkalkül aus Abschnitt 4.3 übertragen, und es werden zwei Beispiele für Lagrangedichten und die daraus resultierenden Euler-Lagrange-Gleichungen angegeben. Eines der Beispiele wird schließlich auf ein kubisches Gitter und in das Kontinuum übertragen.

5.1 Euler-Lagrange-Formalismus

In der klassischen Feldtheorie hat man eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M und Felder ϕ^j, $j = 1, \ldots, k$ gegeben. Die Felder ϕ^j sind als mathematische Objekte r_j-Formen über M. In physikalischen Modellen ist in der Regel $r_j \in \{0, 1\}$. Weiterhin ist eine Funktion $\mathcal{L} : \bigtimes_{j=0}^{k}(\mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*M) \times \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j+1} T^*M)) \to \mathrm{Sec}(\Lambda^n T^*M)$ gegeben, wobei das Symbol $\bigtimes_{j=0}^{k}$ das kartesische Produkt über $j = 0$ bis k bezeichnet. $\mathcal{L}$ heißt Lagrangedichte und wird als reellwertig vorausgesetzt, d. h. $\mathcal{L}(\phi^j, d\phi^j)$ ist für alle ϕ^j eine reelle n-Form. Die Theorie wird durch die Lagrangedichte vollständig festgelegt, so daß $\mathcal{L}$ als *das* eine Theorie charakterisierende Objekt angesehen wird.

Durch Integration über eine n-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit V von M bildet man aus $\mathcal{L}$ das Wirkungsfunktional $S_V : \bigtimes_{j=0}^{k}(\mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*M)) \to$

$\mathbb{R}$, $\phi^j \mapsto \int_V \mathcal{L}(\phi^j, d\phi^j)$. Nun variiert man ϕ^j mit Hilfsfeldern h^j, die am Rand von V verschwinden, gemäß $\phi^j := \tilde{\phi}^j + \epsilon h^j$, wobei $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $h^j \in \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*M)$, $h^j\big|_{\partial V} = 0$ gilt. Die Forderung $\frac{d}{d\epsilon} S_V[\phi^j]\big|_{\epsilon = 0} \stackrel{!}{=} 0$ liefert Feldgleichungen für die Felder ϕ^j. Diese Feldgleichungen sind die *Euler-Lagrange-Gleichungen.*

Als eine weitere Besonderheit betrachtet man oft, wie zu Beginn von Abschnitt 4.3 schon angedeutet, k komplexe Felder ϕ^j, $j = 1, \ldots, k$ und faßt diese gemäß $\phi^j = \phi^{j1} + i\phi^{j2}$ als $2k$ unabhängige reelle Felder auf. Alternativ kann man auch ϕ^j und $\overline{\phi}^j$ als über $\mathbb{R}$ unabhängige Felder betrachten.

Nun führen wir den Euler-Lagrange-Formalismus für komplexe Felder aus und geben die resultierenden Feldgleichungen an. Wir wählen die Untermannigfaltigkeit V so klein, daß sie in einer Karte (U, φ) enthalten ist, und führen die Rechnungen konkret in dieser Karte und den zugehörigen Basenfeldern für $\mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*M)$ aus, um zum einen ungewöhnliche Begriffe wie etwa partielle Ableitungen von n-Formen nach r-Formen, wie sie in [Thi] auftreten, zu vermeiden, vor allem aber, um die Korrespondenz zur Übertragung auf Graphen, bei der wir auch in einer Basis arbeiten, besser zu verdeutlichen.
Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto (x_1(p), \ldots, x_n(p))$. Die Felder ϕ^j haben dann die Darstellung $\phi^j = \sum_{(\mu^j)} \phi^j_{(\mu^j)} dx_{\mu^j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu^j_{r_j}}$. Das Symbol (μ^j) bezeichnet dabei den Multiindex $\mu^j_1 \ldots \mu^j_{r_j}$ mit $\mu^j_1 < \ldots < \mu^j_{r_j}$. Weiterhin sind hier wie auch im folgenden alle Summationen, für die keine expliziten Grenzen angegeben werden, als Summen von 1 bis n zu verstehen. Damit wird $\mathcal{L}$ zu $\mathcal{L}'\big(\phi^{j1}_{(\mu^j)}, \phi^{j2}_{(\mu^j)}, d\phi^{j1}_{(\mu^j)}, d\phi^{j2}_{(\mu^j)}\big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, wobei $\mathcal{L}'$ Werte in C^∞_M hat. Man erhält für das Wirkungsfunktional $S_V[\phi^j] = \int_V \mathcal{L}' dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, und die Euler-Langrange Gleichungen ergeben sich wie folgt.

Satz 5.1 (Euler-Lagrange Gleichungen für komplexe Felder) *Die Euler-Lagrange Gleichungen für komplexe Felder* $\phi^j = \sum_{(\mu^j)} (\phi^{j1}_{(\mu^j)} + i\phi^{j2}_{(\mu^j)}) dx_{\mu^j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu^j_{r_j}} \in \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*M)$ *mit Lagrangedichte* $\mathcal{L} = \mathcal{L}' dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ *lauten*

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)}} = 0 \quad \textit{und}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j2}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial_\nu \phi^{j2}_{(\mu^j)}} = 0 \,.$$

Beweis. Sei $\phi^j = \tilde{\phi}^j + \epsilon h^j$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\epsilon} S_V[\phi^j] = \frac{d}{d\epsilon} \int_V \mathcal{L}(\phi^j, d\phi^j) = \frac{d}{d\epsilon} \int_V \mathcal{L}'(\phi^j, d\phi^j) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \,.$$

Da V kompakt ist und $\mathcal{L}'(\phi^j, d\phi^j)$ in C^∞_M liegt, also überall ∞-oft differenzierbar ist, und damit sowohl $\mathcal{L}'$ als auch $\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}'$ auf V beschränkt sind, kann man

Intergration und Differentiation vertauschen und erhält

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon} S_V[\phi^j]\Big|_{\epsilon=0} &= \int_V \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}'(\phi^j, d\phi^j)\Big|_{\epsilon=0} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_V \sum_{j=0}^{k} \sum_{(\mu^j)} \Bigg[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} h^{j1}_{(\mu^j)} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j2}_{(\mu^j)}} i h^{j2}_{(\mu^j)} \\
&\qquad + \sum_\nu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \partial_\nu h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) \\
&\qquad + \sum_\nu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j2}_{(\mu^j)})} i \partial_\nu h^{j2}_{(\mu^j)} \Big) \Bigg] dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei sind die (reellen) Komponenten $h^{j1}_{(\mu^j)}$ und $h^{j2}_{(\mu^j)}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle Multiindizes (μ^j) frei wählbar. Die Gleichung muß also insbesondere auch dann gelten, wenn alle Komponenten von h bis auf eine Null sind. Deshalb ist Gleichung (5.1) äquivalent zu

$$\int_V \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} h^{j1}_{(\mu^j)} + \sum_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \partial_\nu h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0 \quad \forall (\mu^j) \tag{5.2}$$

und einer entsprechenden Gleichung für alle $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\int_V \sum_\nu \partial_\nu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_V \sum_\nu \Big(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \Big) h^{j1}_{(\mu^j)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&\quad + \int_V \sum_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \Big(\partial_\nu h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Andererseits ist (5.3)

$$\begin{aligned}
&= \int_V d\Big(\sum_\nu (-1)^{\nu-1} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\nu} \wedge \ldots \wedge dx_n \Big) \\
&\overset{\text{(Stokes)}}{=} \int_{\partial V} \sum_\nu (-1)^{\nu-1} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\nu} \wedge \ldots \wedge dx_n = 0\,,
\end{aligned}$$

da h auf ∂V verschwindet. Hierbei bedeutet $\widehat{dx_\nu}$, daß dx_ν in dem Dachprodukt fehlt. Also gilt

$$\int_V \sum_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \Big(\partial_\nu h^{j1}_{(\mu^j)} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$= -\int_V \sum_\nu \partial_\nu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \Big) h^{j1}_{(\mu^j)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \, .$$

Dies ist so etwas wie partielle Integration im $\mathbb{R}^n$. Setzt man in Gleichung (5.2) ein, so erhält man

$$\int_V \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} \Big) h^{j1}_{(\mu^j)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0 \, .$$

Auch der Träger von $h^{j1}_{(\mu^j)}$ kann beliebig verändert werden, so daß die Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn der Ausdruck in den Klammern schon identisch Null ist, also

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j1}_{(\mu^j)})} = 0$$

gilt. Das sind die Euler-Lagrange Gleichungen für die Komponenten von ϕ^{j1}. Analog erhält man für die Komponenten von ϕ^{j2} die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j2}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j2}_{(\mu^j)})} = 0 \, .$$

Das ist die Behauptung. □

Korollar 5.2 *Sieht man ϕ^j und $\overline{\phi}^j$ als die uabhängigen Felder an, so ergeben sich dieselben Euler-Lagrange Gleichungen.*

Beweis. Man kann mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen ersetzen und erhält die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j}_{(\mu^j)}} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j}_{(\mu^j)})} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)})} = 0 \tag{5.4}$$

$$i\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j}_{(\mu^j)}} - i\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)}} - i\sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j}_{(\mu^j)})} + i\sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)})} = 0 \, . \tag{5.5}$$

Durch Subtraktion $(5.4) - i(5.5)$ und Addition $(5.4) + i(5.5)$ erhält man die Euler-Lagrange Gleichungen für ϕ^j und $\overline{\phi}^j$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^{j}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \phi^{j}_{(\mu^j)})} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)}} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu \overline{\phi}^{j}_{(\mu^j)})} = 0 \, .$$

□

Wir geben zwei typische Beispiele an, die später auch auf Graphen diskutiert werden. Beide Beispiele sind auf dem Minkowski-Raum, also dem $\mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{-1}_{\mu\nu} = \begin{cases} \delta_{\mu\nu} & \text{falls} \quad \mu = 0\,, \\ -\delta_{\mu\nu} & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

formuliert.
Als erstes Beispiel geben wir die Lagrangedichte und die Feldgleichungen für ein freies Skalarfeld $\phi \in \mathcal{A}_M$ an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, d\phi) &= d\overline{\phi} \wedge *\phi - m^2\overline{\phi} \wedge *d\phi \\ &= (\langle d\overline{\phi}, d\phi\rangle_{\mathbb{R}} - m^2\langle\overline{\phi}, \phi\rangle_{\mathbb{R}})\omega_V\,. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}}$ das *reelle* Skalarprodukt auf r-Formen, das durch die Minkowski-Metrik η induziert wird, und ω_V die kanonisch gegebene Volumenform. Weiterhin ist $*$ der Hodge-$*$-Operator bezüglich der Minkowski-Metrik. Bildet man statt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}}$ eine von η induzierte Sesquilinearform $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ auf den r-Formen, wie dies in Abschnitt 4.3 für den Fall des diskreten Formenbündels über Graphen eingeführt wurde, so hat man

$$\mathcal{L} = (\langle d\phi, d\phi\rangle - m^2\langle\phi, \phi\rangle)\omega_V\,.$$

In einer passenden Karte erhält man daraus

$$\mathcal{L} = \Big(\sum_{\mu,\nu} \partial_\mu\overline{\phi}\,\partial_\nu\phi\,\eta^{-1}_{\mu\nu} - m^2\overline{\phi}\phi\Big)\omega_V$$

und damit die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu} \partial_\mu\partial_\nu\overline{\phi}\eta^{-1}_{\mu\nu} + m^2\overline{\phi} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &(\Box + m^2)\overline{\phi} = 0\,. \end{aligned}$$

Analog erhält man für ϕ die Gleichung $(\Box + m^2)\phi = 0$. Das ist die bekannte Klein-Gordon-Gleichung.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Lagrangedichte der klassischen Elektrodynamik für das reelle Vektorpotential $A \in \mathrm{Sec}(T^*M)$ und die Viererstromdichte $J \in \mathrm{Sec}(T^*M)$. Sie ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, dA) &= -\frac{1}{2}dA \wedge *dA - A \wedge *J \\ &= \Big(-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\mu,\nu \\ \lambda<\kappa}}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\kappa - \partial_\kappa A_\lambda)\eta^{-1}_{\mu\lambda}\eta^{-1}_{\nu\kappa} - \sum_{\mu,\nu} A_\mu J_\nu \eta^{-1}_{\mu\nu}\Big)\omega_V \end{aligned}$$

gegeben. Verwendet man wie üblich $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und den Ricci-Kalkül, so ist dies gerade der bekannte Ausdruck

$$\mathcal{L}(A, dA) = \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \Big) \omega_V \,.$$

Die Variation ergibt als Feldgleichungen $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$, wobei auch hier die Summenkonvention gilt.

Nachdem die Begriffe und Methoden der klassischen Feldtheorie im Kontinuum dargestellt wurden, übertragen wir im nächsten Abschnitt diese Begriffe und Methoden auf den diskreten Differentialkalkül aus Abschnitt 4.3 und erklären so eine klassische Feldtheorie auf Graphen.

5.2 Euler-Lagrange-Formalismus auf Graphen

In der klassischen Feldtheorie im Kontinuum haben die Lagrangedichten Werte in den n-Formen über einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Sie können deshalb als ein Produkt einer Dichtefunktion $\mathcal{L}'$ mit Werten in $\mathcal{A}$ und der kanonisch gegebenen Volumenform ω_V geschrieben werden. Das Wirkungsfunktional S wird dann durch Integration über eine kompakte Untermannigfaltigkeit gebildet. Die Volumenform ist jedoch, wie wir schon gesehen haben, nicht einfach auf den Differentialkalkül aus Abschnitt 4.3 auf Graphen übertragbar. Ebensowenig ist es also auch der Begriff der Integration von Dichten. An die Stelle der Integration einer Dichte über eine kompakte Untermannigfaltigkeit tritt stattdessen die Summation der zugehörigen Dichtefunktion über einen endlichen, induzierte Untergraphen des betrachteten Graphen. Wir bezeichnen den endlichen Untergraphen $\mathcal{G}'$, über den summiert wird, auch als Summationsgebiet. Auf diese Weise läßt sich der Euler-Lagrange-Formalismus auf Graphen übertragen.

Sei also $\mathcal{G} = (V, E)$ ein lokal endlicher Graph. Die Felder auf $\mathcal{G}$ seien durch $\phi^j \in \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*\mathcal{G})$ mit $j = 1, \ldots, k$ gegeben. Weiterhin sei eine „Lagrangedichte" $\mathcal{L} : \bigtimes_{j=1}^{k} (\mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*\mathcal{G}) \times \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j+1} T^*\mathcal{G})) \to \mathcal{A}$ gegeben. Dann ist das Wirkungsfunktional für einen endlichen, induzierten Untergraphen $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}$ durch $S_{\mathcal{G}'}[\phi^j] = \sum_{\nu \in I'} \mathcal{L}(\phi^j, d\phi^j)(n_\nu)$ erklärt. Nun variiert man wieder alle ϕ^j gemäß $\phi^j = \tilde{\phi}^j + \epsilon h^j$, wobei $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $h^j \in \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*\mathcal{G})$, $h^j\big|_{\partial\mathcal{G}'} = 0$ gilt. Dabei besteht $\partial\mathcal{G}'$ aus allen Vertizes in $\mathcal{G}'$, die nächste Nachbarn außerhalb von $\mathcal{G}'$ besitzen. So erhält man auch hier durch die Forderung $\frac{d}{d\epsilon} S_{\mathcal{G}'}[\phi^j]\Big|_{\epsilon = 0} \overset{!}{=} 0$ Euler-Lagrange-Gleichungen.

Wir verwenden von nun an griechische Indizes zur Bezeichnung der Vertizes und Kanten in $\mathcal{G}$. Der Grund hierfür wird bei den Beispielen klar werden.

In dem hier verwendeten diskreten Differentialkalkül auf Graphen ist es sinnvoll, in den Komponenten bezüglich der Elementarschnitte $\tilde{d}_{\mu\nu}$ zu arbeiten, weil einige Begriffe wie etwa die äußere Ableitung d auf der Expansion bezüglich dieser

Schnitte definiert wurde. Wir stellen deshalb die Felder ϕ^j in der Form

$$\phi^j = \sum_{\substack{\nu \in I \\ (\mu^j) \subset \mathrm{NN}(\nu)}} \phi^j_{(\mu^j)} \tilde{d}_{\nu\mu^j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}_{\nu\mu^j_{r_j}}$$

dar. Dabei ist (μ^j) wieder der Multiindex $\mu^j_1 \ldots \mu^j_{r_j}$ mit $\mu^j_1 < \ldots < \mu^j_{r_j}$ und das Symbol $(\mu^j) \subset \mathrm{NN}(\nu)$ bei der Summation steht für $\mu^j_1 \in \mathrm{NN}(\nu), \ldots, \mu^j_{r_j} \in \mathrm{NN}(\nu)$. $\phi^j_{(\mu^j)}$ ist aus $\mathcal{A}_V$, und wir bezeichnen wie zuvor die Werte an einem Vertex n_ν mit $\phi^j_{(\mu^j)}(n_\nu) = \phi^j_{\nu(\mu^j)}$. Weiterhin werden alle ϕ^j wieder in Realteil ϕ^{j1} und Imaginärteil ϕ^{j2} aufgeteilt. Also wird $\mathcal{L}$ eine Funktion von $\phi^{j1}_{(\mu^j)}$, $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$, $\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)}$ und $\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j2}_{(\mu^j)}$. Dabei wird im folgenden vorausgesetzt, daß $\mathcal{L}$ in diesen Argumenten eine im üblichen Sinne differenzierbare Funktion ist, so daß partielle Ableitungen nach $\phi^{j1}_{(\mu^j)}$ und die Ableitung nach ϵ wohldefiniert sind. Bei der Übertragung der Lagrangedichten aus dem Kontinuum auf Graphen ist diese Annahme stets erfüllt, da die Dichtefunktionen der Lagrangedichten dort differenzierbar von ihren Argumenten abhängen.

In den Kapiteln 3 und 4 wurde bewußt auf die Einführung einer Skala etwa in Form einer Länge von Kanten verzichtet. Denn eines der Ziele in dieser Arbeit ist es, Graphen unabhängig von einer Einbettung oder einer Skala zu beschreiben. Um später jedoch an einem Beispiel durch einen Kontinuumslimes einen Zusammenhang zu der Theorie im Kontinuum herstellen zu können, führen wir hier einen Skalenparameter a ein, der anschaulich der Länge einer Kante entspricht. Wir ergänzen die diskreten Ableitungen $\partial_{\mu\nu}$ durch einen Faktor $\frac{1}{a}$ gemäß $\partial_{\mu\nu}\phi = \frac{1}{a}(\phi_\mu - \phi_\nu)$. Für $a = 1$ erhält man den ursprünglichen Fall. Zunächst dient der Faktor a nur dem Zweck, in den auftretenden Gleichungen Differenzen, die aus diskreten Ableitungen entstehen, von solchen zu unterscheiden, die schlicht als Differenzen enthalten sind.

Satz 5.3 (Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder auf Graphen)
Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Komponenten $\phi^{j1}_{(\mu^j)}$ und $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$ der Felder $\phi^j \in \mathrm{Sec}(\Lambda^{r_j} T^*\mathcal{G})$ mit Lagrangedichte $\mathcal{L}$ lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}}(n_\nu) + \frac{1}{a} \sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\lambda) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu) \Big) = 0 \qquad (5.6)$$

und identischen Gleichungen für $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$.

Beweis.

$$\frac{d}{d\epsilon} S[\phi^j]\Big|_{\epsilon=0} = \sum_{\nu \in I'} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(\mu^j)} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} h^{j1}_{(\mu^j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j2}_{(\mu^j)}} i h^{j2}_{(\mu^j)} +$$

$$+ \sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}\tilde{\partial}_{\nu\lambda}h^{j1}_{(\mu^j)}$$
$$+ \sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j2}_{(\mu^j)})}i\tilde{\partial}_{\nu\lambda}h^{j2}_{(\mu^j)}\Big)(n_\nu) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Mit dem gleichen Argument wie in der klassischen Feldtheorie im Kontinuum impliziert die Tatsache, daß diese Gleichung für beliebige $h^{j1}_{(\mu^j)}$ gelten muß, nach Vertauschen der Summationsreihenfolge schon das Verschwinden der einzelnen Summanden

$$\sum_{\nu \in I'} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}} h^{j1}_{(\mu^j)} + \sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}\tilde{\partial}_{\nu\lambda}h^{j1}_{(\mu^j)}\Big)(n_\nu) = 0$$

und identisch für $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$. Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\nu \in I' \\ \lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}\tilde{\partial}_{\nu\lambda}h^{j1}_{(\mu^j)}(n_\nu) \\
&= \frac{1}{a}\Big(\sum_{\substack{\nu \in I' \\ \lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)h^{j1}_{\lambda(\mu^j)} - \sum_{\substack{\nu \in I' \\ \lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)h^{j1}_{\nu(\mu^j)}\Big) \\
&= \frac{1}{a}\Big(\sum_{\substack{\lambda \in I' \\ \nu \in \mathrm{NN}(\lambda)}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\lambda)h^{j1}_{\nu(\mu^j)} - \sum_{\substack{\nu \in I' \\ \lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)h^{j1}_{\nu(\mu^j)}\Big)\,. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Da $h^{j1}_{(\mu^j)}$ außerhalb und auf dem Rand von $\mathcal{G}'$ verschwindet und $\mathcal{G}$ wie immer symmetrisch ist, ist hierbei die Summe über $\lambda \in I'$ und $\nu \in \mathrm{NN}(\lambda)$ gleichbedeutend mit der Summe über $\nu \in I'$ und $\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)$. Das Vertauschen der Summationen entspricht der „partiellen Integration“ im Kontinuumsfall. Man erhält also für (5.7) den Ausdruck

$$\frac{1}{a}\sum_{\substack{\nu \in I' \\ \lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\lambda) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)\Big)h^{j1}_{\nu(\mu^j)}\,.$$

Damit hat man insgesamt

$$\sum_{\nu \in I'}\Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}}(n_\nu) + \frac{1}{a}\sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\lambda) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)\Big)\Big]h^{j1}_{\nu(\mu^j)} = 0\,.$$

Da auch hier die Gleichung für alle $h^{j1}_{\nu(\mu^j)}$ gelten muß, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{j1}_{(\mu^j)}}(n_\nu) + \frac{1}{a}\sum_{\lambda \in \mathrm{NN}(\nu)}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\lambda) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)})}(n_\nu)\Big) = 0\,.$$

Eine analoge Rechnung liefert für $\phi^{j2}_{(\mu^j)}$ das entsprechende Ergebnis. □

Die Differenz in (5.6) entspricht einer diskreten Ableitung, die man jedoch nicht mit Hilfe der $\tilde{\partial}_{\mu\nu}$ schreiben kann.

Korollar 5.4 *Sieht man wieder ϕ und $\overline{\phi}$ als die unabhängigen Felder an, so ergeben sich die gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen.*

Beweis. Die Argumentation ist dieselbe wie bei Korollar 5.2. □

Trotz der durch die Notation betonten Analogie zu den Gleichungen aus der klassischen Feldtheorie im Kontinuum muß man die Gleichungen (5.6) sehr vorsichtig lesen und interpretieren. Der Ausdruck $\tilde{\partial}_{\lambda\nu}\phi^{j1}_{(\mu^j)}$ ist nur an Vertizes n_ν existent, für die $(\mu^j) \subset \mathrm{NN}(\nu)$ gilt oder die einen Nachbarn n_λ haben, für den $(\mu^j) \subset \mathrm{NN}(\lambda)$ ist. Entsprechendes gilt auch für $\tilde{\partial}_{\nu\lambda}\phi^{j1}_{(\mu^j)}$. Man erhält deshalb zu festem (μ^j) nur aussagekräftige Gleichungen an Vertizes n_ν, die die oben genannten Bedingungen erfüllen. Weiterhin wissen wir schon aus den Beobachtungen zu der äußeren Ableitung in Abschnitt 4.3, daß die Komponentenfunktionen $\phi^{j1}_{(\mu^j)}$ der r-Formen oft nur einpunktigen Träger haben und deshalb die diskreten partiellen Ableitungen nur noch Vorzeichen verändern. Dadurch kann (5.6) zu einer Gleichung werden, in der nur Werte von Formen *an einem Vertex* eingehen. Das macht die Gleichungen wertlos, da dann, wie sich später an den Beispielen zeigt, keine Dynamik beschrieben werden kann.

Jetzt wollen wir auch die Beispiele des letzten Abschnittes auf Graphen übertragen. Die Beispiele waren beide auf dem Minkowski-Raum formuliert. Insbesondere hat dieser eine ausgezeichnete Richtung, die man als Zeitrichtung interpretiert, so daß man aus den Feldgleichungen eine Dynamik ablesen kann. Eine analoge Situation müssen wir auch in dem hier vorliegenden Rahmen schaffen. Wir konstruieren einen Graphen, der das Analogon zu einer Zeitrichtung besitzt und damit über die Feldgleichungen das Ablesen einer Dynamik erlaubt.
Sei ein Graph $\mathcal{G}' = (V', E')$ mit Indexmengen $I' \subset \mathbb{N}$ und $J' \subset I' \times I'$ gegeben. Dieser kodiert die Raumschnitte des zu konstruierenden Graphen. Dann betrachten wir den Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ mit Indexmengen $I \subset \mathbb{N}$ und $J \subset I \times I$, wobei $V = \{n_\mu : \mu \in I\}$ und $I = I' \times \mathbb{Z}$ sowie $E = \{n_{ij} : (i,j) \in J\}$ mit $J = (I' \times \mathbb{Z}) \times (I' \times \mathbb{Z}) \cup \{(\mu,\nu) : \mu = (i,t), \nu = (j,t'), i = j \in I', t' = t \pm 1\}$ sind. Die einzelnen Vertizes in $\mathcal{G}$ werden entsprechend mit Paaren $\mu = (i,t)$, $i \in I$ und $t \in \mathbb{Z}$ numeriert. Die erste Zahl ist eine räumliche Komponente und die zweite eine zeitliche Komponente. Die Konstruktion ist das kartesische Produkt von $\mathcal{G}'$ mit einer einfachen Kette. Sie ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Durch die sukzessive Anordnung von Raumschnitten hat man eine einfache Möglichkeit, eine Dynamik abzulesen. Als einfachste Variante würde man die Raumschnitte, d. h. die Untergraphen zu $t = const$, als die Zustände des Graphen $\mathcal{G}'$ zu diskreten Zeitpunkten t interpretieren. Bei einer solchen Interpretation ist es offensichtlich, daß Euler-Lagrange-Gleichungen, die nur die Werte der Felder an einem Vertex in Zusammenhang bringen, keine Dynamik erlauben. Denn die Raumschnitte sind

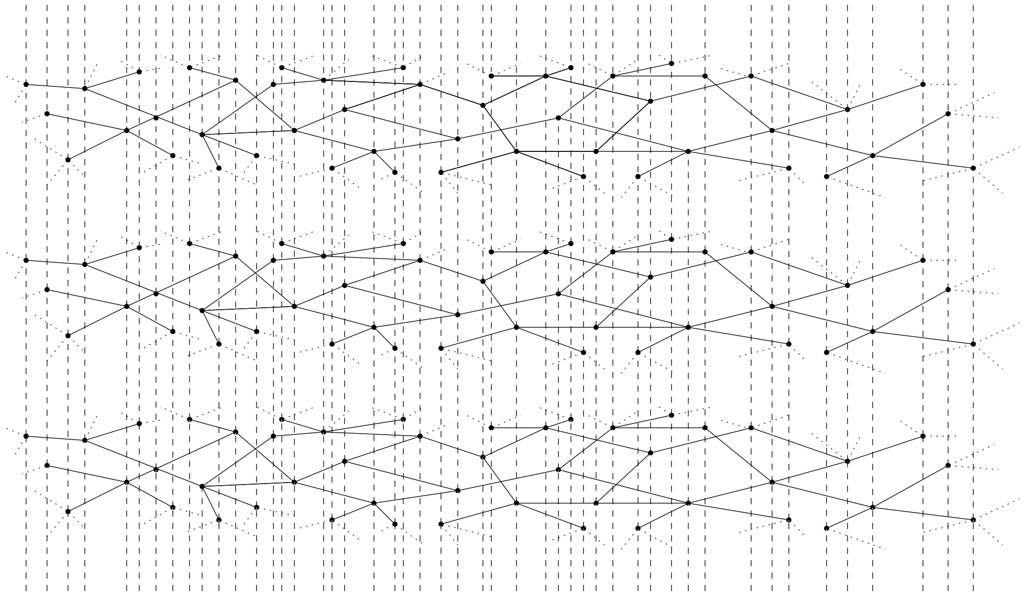


Abbildung 5.1: Raumzeit-Graph, die durchgezogenen Kanten sind räumliche Kanten, die gestrichelten Kanten zeitliche. Die gepunkteten Kanten deuten an, daß auch der Raumschnitt schon unendlich sein kann. Die fett hervorgehobenen Vertizes und Kanten bilden ein Summationsgebiet mit zwei Zeitschritten und jeweils einer $\mathcal{U}_2$ Umgebung des weißen Vertex in den einzelnen Raumschnitten

dann vollständig unabhängig voneinander.

Im folgenden verwenden wir stets die Bezeichnungen $\mu = (i,t)$, $\nu = (j,t')$, $\kappa = (k,t'')$ und $\lambda = (l,t''')$. Dies erklärt nun auch, warum wir zuvor schon zu griechischen Indizes gewechselt haben. Da $\mathcal{G}$ ein lokal endlicher Graph ist, wenn $\mathcal{G}'$ einer war, braucht man für $\mathcal{G}$ keine neuen Begriffe einzuführen. Allerdings erzeugt die festgelegte Konstruktion in Zeitrichtung schon gewisse Relationen für die Elementarschnitte $\tilde{\partial}_{\mu\nu}$ und $\tilde{d}_{\mu\nu}$. Denn $\tilde{\partial}_{\mu\nu} \neq 0$ gilt genau dann, wenn $i = j$ und $t' = t \pm 1$ oder $j \in \mathrm{NN}(i)$ und $t' = t$ ist. Dasselbe ist für $\tilde{d}_{\mu\nu}$ richtig.

Wir führen eine spezielle Metrik $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\mu$ ein, die die Minkowski-Metrik imitieren soll.

Definition 5.5 (Minkowski-Metrik auf Raumzeit-Graphen) *Wir definieren die Metrikkomponenten $\eta_{\mu\nu\kappa}$ durch*

$$\eta_{\mu\nu\kappa} := \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad k = j = i \quad \textit{und} \quad t'' = t' = t \pm 1\,, \\ -1 & \textit{falls} \quad k = j \in \mathrm{NN}(i) \quad \textit{und} \quad t'' = t' = t\,, \\ 0 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

Die Matrizen η_μ sind also insbesondere diagonal und bis auf die Dimension identisch für alle $\mu \in I$. Die inverse Metrik ist bei dieser Wahl gerade die Metrik selbst: $\eta^{-1}_{\mu\nu\kappa} = \eta_{\mu\nu\kappa}$.

Mit diesen Definitionen können wir die Beispiele des letzten Abschnittes nun auch auf Graphen behandeln. Das freie Skalarfeld hat hier die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle d\phi, d\phi\rangle - m^2\langle \phi, \phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\kappa\in I\\ \mu,\nu\in \mathrm{NN}(\kappa)}} \tilde{\partial}_{\kappa\mu}\overline{\phi}\,\tilde{\partial}_{\kappa\nu}\phi\,\tilde{\eta}^{-1}_{\kappa\mu\nu} - m^2\overline{\phi}\phi\,.$$

Bei der Definition von $\mathcal{L}$ haben wir zusätzlich noch einen Faktor $\frac{1}{2}$ eingeführt. Dieser Faktor spielt eine ähnliche Rolle wie der Faktor $\frac{1}{2}$ bei der Definition von Δ in Abschnitt 4.2 und 4.3. Der Grund für das Auftreten solcher Faktoren wird auf Seite 104 ausführlich erklärt.
Man kann die Lagrangedichte noch weiter vereinfachen, indem man die Definition für $\eta^{-1}_{\kappa\mu\nu}$ einsetzt und die Summation passend gruppiert:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\kappa\in I}\Big(\sum_{\substack{i=k\\ t=t''\pm 1}} \tilde{\partial}_{\kappa\mu}\overline{\phi}\,\tilde{\partial}_{\kappa\mu}\phi - \sum_{\substack{i\in \mathrm{NN}(k)\\ t=t''}} \tilde{\partial}_{\kappa\mu}\overline{\phi}\,\tilde{\partial}_{\kappa\mu}\phi\Big) - m^2\overline{\phi}\phi\,.$$

Damit errechnen sich die Euler-Lagrange Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
& -m^2\phi_\nu + \frac{1}{2a}\Big(\sum_{\substack{l=j\\ t'''=t'\pm 1}} \partial_{\lambda\nu}\phi - \sum_{\substack{l\in \mathrm{NN}(j)\\ t'''=t'}} \partial_{\lambda\nu}\phi - \sum_{\substack{l=j\\ t'''=t'\pm 1}} \partial_{\nu\lambda}\phi + \sum_{\substack{l\in \mathrm{NN}(j)\\ t'''=t'}} \partial_{\nu\lambda}\phi\Big) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & -m^2\phi_\nu + \frac{1}{2a}\Big(\sum_{\delta=\pm 1}\big(\partial_{(j,t'+\delta)(j,t')}\phi - \partial_{(j,t')(j,t'+\delta)}\phi\big)\\
& \qquad - \sum_{l\in \mathrm{NN}(j)}\big(\partial_{(l,t')(j,t')}\phi - \partial_{(j,t')(l,t')}\big)\Big) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & -m^2\phi_\nu + \frac{1}{2a}\Big(2\phi_{(j,t')} - 2\phi_{(j,t'+1)} - 2\phi_{(j,t'-1)} + 2\phi_{(j,t')}\\
& \qquad - 2\sum_{l\in \mathrm{NN}(j)}\big(\phi_{(j,t')} - \phi_{(l,t')}\big)\Big) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & -m^2\phi_{(j,t')} - \frac{1}{a}\Big[\big(\phi_{(j,t'+1)} - \phi_{(j,t')}\big) - \big(\phi_{(j,t')} - \phi_{(j,t'-1)}\big)\\
& \qquad - \Big(\sum_{l\in \mathrm{NN}(j)}\big(\phi_{(l,t')}\big) - v_j\phi_{(j,t')}\Big)\Big] = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Diese Gleichung läßt sich nach $\phi_{(j,t'+1)}$ auflösen, so daß man eine Gleichung erhält, die die Werte des Skalarfeldes ϕ im Raumschnitt $t'+1$ festlegt, wenn die Werte von ϕ für die Raumschnitte t' und $t'-1$ bekannt sind. Man kann die Raumschnitte zu festem t' als die Zustände eines zellularen Netzwerks zu einer Schaltzeit $\tau = t'$ interpretieren. Die Werte von ϕ an den einzelnen Vertizes sind dann die inneren Zustände der Vertizes. Auf diese Weise liefert Gleichung (5.8) eine

Netzwerkdynamik für die Vertexzustände. Wählt man geeignete Lagrangedichten, die auch Wechselwirkungsterme zwischen Null- und Einsformen enthalten, so kann man auf diese Weise Netzwerkgesetze gewinnen, die Vertexzustände *und* Kantenzustände umfassen.

Die ersten beiden Terme in der eckigen Klammer in Gleichung (5.8) sind eine zweite diskrete partielle Ableitung in Zeitrichtung und der letzte Term ist der zuvor definierte Laplace-Operator jeweils angewendet auf ϕ und ausgewertet an der Stelle (j, t'). Schreibt man diese Terme zusammen suggestiv als $\Box_{\text{Graph}}\phi(n_\nu)$, so lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$(\Box_{\text{Graph}} + m^2)\phi = 0\,.$$

Wie stark die Korrespondenz zur Klein-Gordon-Gleichung im Kontinuum ist, die wir durch die Notation unterstellt haben, zeigt sich bei der Übertragung auf den Spezialfall eines kubischen Gitters und dem anschließenden Kontinuumslimes.
Betrachten wir also als Spezialfall den Graphen $\mathcal{G}$, dessen Raumschnitte $\mathcal{G}'$ n-dimensionale kubische Gitter sind. Wir numerieren die Vertizes in $\mathcal{G}$ entsprechend der üblichen Numerierung in Gittern durch $n+1$ Koordinaten $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ mit $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}$. Dabei ist μ_0 die vorher mit t bezeichnete Koordinate in Zeitrichtung, und die $\mu_1, \dots, \mu_n$ sind die Koordinaten in $\mathcal{G}'$ und ersetzen den räumlichen Index i. Weiterhin verwenden wir die Notation

$$\partial_k^\pm := \sum_{\mu\in I} \tilde{\partial}_{\mu\,\nu(\mu)} \quad \text{mit} \quad \mu = (\mu_0, \dots, \mu_n),$$
$$\nu(\mu) = (\mu_0, \dots, \mu_k \pm 1, \dots, \mu_n) =: \mu \pm \delta_k\,.$$

Wir schreiben in der auf Gittern üblichen Konvention $\phi(\mu)$ statt $\phi(n_\mu)$, um die Notation zu vereinfachen. Damit wird die Lagrangedichte des komplexen Skalarfeldes

$$\mathcal{L}(\phi, d\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^{n+1}} \Big(\partial_0^+\overline{\phi}\,\partial_0^+\phi + \partial_0^-\overline{\phi}\,\partial_0^-\phi - \sum_{k=1}^{n}(\partial_k^+\overline{\phi}\,\partial_k^+\phi + \partial_k^-\overline{\phi}\,\partial_k^-\phi)\Big) - m^2\overline{\phi}\phi\,.$$

Daraus errechnet man die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned}
&-m^2\phi(\mu) + \frac{1}{2a}\Big[\partial_0^+\phi(\mu-\delta_0) - \partial_0^-\phi(\mu) + \partial_0^-\phi(\mu+\delta_0) - \partial_0^+\phi(\mu) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_k^+\phi(\mu-\delta_k) - \partial_k^-\phi(\mu)\big) - \big(\partial_k^-\phi(\mu+\delta_k) - \partial_k^+\phi(\mu)\big)\Big)\Big] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & m^2\phi(\mu) + \frac{1}{2a}\Big[\partial_0^+\phi(\mu) - \partial_0^+\phi(\mu-\delta_0) - \big(\partial_0^-\phi(\mu+\delta_0) - \partial_0^-\phi(\mu)\big) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n}\Big(\partial_k^+\phi(\mu) - \partial_k^+\phi(\mu-\delta_k) - \big(\partial_k^-\phi(\mu+\delta_k) - \partial_k^-\phi(\mu)\big)\Big)\Big] = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Man überzeugt sich leicht, daß zwischen den diskreten Ableitungen in positiver und negativer Richtung die folgenden Beziehungen bestehen.

$$\begin{aligned}
\partial_0^- \phi(\mu + \delta_0) &= -\partial_0^+ \phi(\mu)\,, \\
\partial_0^- \phi(\mu) &= -\partial_0^+ \phi(\mu - \delta_0)\,, \\
\partial_k^- \phi(\mu + \delta_k) &= -\partial_k^+ \phi(\mu)\,, \\
\partial_k^- \phi(\mu) &= -\partial_k^+ \phi(\mu - \delta_k)\,.
\end{aligned}$$

Damit sind je zwei der Klammern in (5.9) gleich und der resultierende Faktor 2 hebt sich mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ weg und man erhält

$$-m^2\phi(\mu) - \frac{1}{a}\Big(\partial_0^+\phi(\mu) - \partial_0^+\phi(\mu - \delta_0) - \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_k^+\phi(\mu) - \partial_k^+\phi(\mu - \delta_k)\right)\Big) = 0\,. \tag{5.10}$$

Die Differenzen der diskreten partiellen Ableitungen zusammen mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ sind diskrete Ableitungen zweiter Ordnung. Der Ausdruck in der großen Klammer ist also das, was man als $\Box_{\text{Gitter}}\phi(\mu)$ auf Gittern kennt. Damit ist die Gleichung dann

$$(\Box_{\text{Gitter}} + m^2)\phi(\mu) = 0\,.$$

Man kann aber auch den zuvor definierten Laplace-Operator aus Abschnitt 4.1 wiedererkennen, wenn man die Summe aus Gleichung (5.10) zu

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \partial_k^+\phi(\mu) - \partial_k^+\phi(\mu - \delta_k) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\phi(\mu+\delta_k) - \phi(\mu) - \phi(\mu) + \phi(\mu - \delta_k)\right) \\
&= \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\} \\ s=\pm 1}} \phi(\mu + s\delta_k)\ - 2n\phi(\mu)
\end{aligned}$$

umformt. Das ist gerade die Summe über alle nächsten Nachbarn von μ und $2n$ ist der Grad des Vertex an der Stelle μ in $\mathcal{G}'$. Also liegt hier der Laplace-Operator in $\mathcal{G}'$ vor.

Wir haben den Gitterspezialfall auf dem Niveau der Lagrangedichte eingeführt. Ebensogut kann man direkt die Euler-Lagrange Gleichungen (5.6) auf diesen Spezialfall übertragen. Dann hat man mit

$$\begin{aligned}
-m^2\phi(\mu) - \Big(\left(\phi(\mu+\delta_0) - \phi(\mu)\right) - \left(\phi(\mu) - \phi(\mu - \delta_0)\right) \\
- \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\} \\ a\in\{-1,1\}}}\left(\phi(\mu + a\delta_k)\ + 2n\phi(\mu)\right)\Big) = 0
\end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis.

Setzt man voraus, daß man ϕ zu einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$ erweitern kann, kann man auch einen Kontinuumslimes durchführen. Zu diesem Zweck betten wir das $(n+1)$-dimensionale Gitter mittels $\iota : \mathbb{Z}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \mapsto (a\mu_0, \ldots, a\mu_n)$ in den $\mathbb{R}^{n+1}$ ein und sehen das Feld ϕ als Funktion auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ an. Gleichung (5.10) induziert durch ι die Gleichung

$$-m^2\phi(x) - \frac{1}{a}\Big(\partial_0^+\phi(x) - \partial_0^+\phi(x - a\delta_0) - \sum_{k=1}^{n}\big(\partial_k^+\phi(x) - \partial_k^+\phi(x - a\delta_k)\big)\Big) = 0\,. \tag{5.11}$$

Dabei gehen die diskreten partiellen Ableitungen $\partial_\mu^\pm$ in $\partial_\mu^\pm\phi(x) = \frac{1}{a}(\phi(x \pm a\delta_\mu) - \phi(x))$ über. Die Konvergenz der Ausdrücke in Gleichung (5.11) sieht man am leichtesten, wenn man eine Reihenentwicklung von ϕ verwendet:

$$\phi(x + a\delta_\mu) = \phi(x) + \Big(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi\Big)(x)a + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x)a^2 + \mathcal{O}(a^3)\,.$$

Der Grenzwert $a \to 0$ liefert

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\big(\partial_0^+\phi(\mu) - \partial_0^+\phi(\mu - \delta_0)\big)\\
&= \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\big(\phi(x+a) - 2\phi(x) + \phi(x-a)\big)\\
&= \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\Big[\phi(x) + \Big(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi\Big)(x)a + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x)a^2\\
&\qquad\qquad - 2\phi(x) + \phi(x) - \Big(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi\Big)(x)a + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x)a^2\Big] + \mathcal{O}(a^3)\\
&= \lim_{a\to 0}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x) + \mathcal{O}(a) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (5.11) ein, erhält man die Klein-Gordon-Gleichung

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\phi\Big)(x) - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\phi\Big)(x) + m^2\phi(x) = 0\\
\Leftrightarrow \quad (\Box + m^2)\phi = 0\,.
\end{aligned}$$

Das zweite Beispiel der Lagrangedichte der klassischen Elektrodynamik ist auf diese Weise nicht sinnvoll zu übertragen. Wie die Bemerkungen zu der äußeren Ableitung auf höheren Formen in Abschnitt 4.3 schon angedeutet haben, werden die hier aus dem Euler-Lagrange-Formalismus resultierenden Gleichungen mehr oder weniger nichtssagend, weil nur Werte des Feldes an einzelnen Vertizes mit sich selbst verknüpft werden. Dadurch sind alle Werte des Feldes A an den verschiedenen Vertizes voneinander entkoppelt und die Gleichungen enthalten keine Aussage. Wir geben sie deshalb überhaupt nicht erst an.

Abschließend diskutieren wir jetzt die beharrlich auftretenden Faktoren 2 und $\frac{1}{2}$. In der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ und - über Karten - lokal in jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit, bildet man Richtungsableitungen entlang eines Vektors stets nur in eine Richtung. Nehmen wir das Beispiel einer komplexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so bildet man als Richtungsableitung an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung eines Vektors $y \in \mathbb{R}^n$ nur $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+hy) - f(x))$ und nicht auch noch $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x-hy) - f(x))$. Entsprechend wirkt auch d gemäß

$$df = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\mu} f dx_\mu$$

nur mit einer Summe über n Richtungen. Nähert man den $\mathbb{R}^n$ mit einem kubischen Gitter an, bedeutet dies, daß man nur die diskreten Ableitungen ∂_μ^+, nicht aber die ∂_μ^- verwendet. In einem beliebigen Graphen kann man im Gegensatz dazu nicht mehr entscheiden, welche Kanten antiparallel zueinander sind. Spätestens bei einer ungeraden Anzahl von inzidenten Kanten an einem Vertex bricht ein solches Konzept zusammen. Also summiert man bei der Bildung von d wie gesehen über alle inzidenten Kanten. Als Graph gesehen müßte man also in dem kubischen Gitter, das wir als diskrete Näherung des $\mathbb{R}^n$ eingeführt haben, alle diskreten Ableitungen ∂_μ^+ und ∂_μ^- bilden. Je nachdem, aus welcher Sicht man das Gitter betrachtet, erhält man einen Faktor 2 oder $\frac{1}{2}$ im Vergleich zu dem jeweils anderen Zugang. In Abschnitt 4.1 wurde nun der Laplace-Operator so gewählt, daß er auf einem gerichteten Gitter den zum Kontinuumslimes passenden Gitter-Laplace-Operator und auf einem symmetrischen Gitter das Doppelte desselben liefert. In den Abschnitten 4.2 und 4.3 hingegen, die ohnehin speziell auf symmetrische Graphen ausgelegt sind, wurde ein Faktor $\frac{1}{2}$ eingeführt, so daß der Graphen-Laplace-Operator auf symmetrischen Gittern den zum Kontinuumslimes passenden Gitter-Laplace-Operator liefert. Dieselbe Korrektur um den Faktor $\frac{1}{2}$ wurde dann konsequent auch bei den Lagrangedichten für Graphen in diesem Abschnitt verwendet.
Im übrigen treten mit dem Verlust der Richtung in Graphen nur deshalb keine gravierenden Probleme auf, weil die betrachteten Theorien in den resultierenden Feldgleichungen stets Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Bildet man hingegen die ersten Ableitungen auf einem symmetrischen Gitter in beiden Richtungen und führt einen Kontinuumslimes aus, so heben sich die Ableitungen zu entgegengesetzten Richtungen für stetig differenzierbare Felder weg, und die erste Ableitung ist überall identisch Null. Bei der zweiten Ableitung aber gleichen sich die beiden entstehenden Vorzeichen aus und man erhält stattdessen den diskutierten Faktor zwei.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zwei Themenschwerpunkte im Bereich der Grundlagen einer auf zellularen Netzwerken beruhenden Modellbildung zur Beschreibung der Raumzeit auf der Planckskala untersucht. In Kapitel 3 haben wir uns der Frage gewidmet, wie ein mögliches Konzept für die Dimension in einem Netzwerkmodell aussehen könnte. Diese Frage ist genaugenommen die Frage nach Dimensionsbegriffen auf ungerichteten einfachen Graphen oder auf symmetrischen Digraphen. Es wurden deshalb die vier Dimensionsbegriffe der Skalierungsdimension, Kanten-Skalierungsdimension, Konnektivitätsdimension und Kanten-Konnektivitätsdimension für ungerichtete einfache Graphen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Es stellte sich heraus, daß die zunächst sehr ähnlich scheinenden Begriffe im allgemeinen *nicht* übereinstimmen, was durch Beispiele belegt wurde. Die vielfältigen Relationen zwischen den einzelnen Begriffen kann man am Ende von Kapitel 3 in den dortigen Tabellen nachlesen. Ein zentrales Ergebnis ist dabei, daß auf Graphen, für die die Konnektivitätsdimension von jedem Vertex aus existiert und deren Vertexgrad gleichmäßig beschränkt ist, alle Dimensionsbegriffe existieren, unabhängig vom Ausgangspunkt der Dimensionsbestimmung sind und übereinstimmen.

Schon anhand der Definitionen der Dimensionsbegriffe wurde die Verwandtschaft dieser Begriffe mit der Kästchenzahldimension aus der fraktalen Geometrie deutlich. Diese Beobachtung konnte dadurch erhärtet werden, daß sich, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, zu gewissen strikt selbstähnlichen Mengen zugehörige Graphen konstruieren lassen, deren Skalierungsdimension mit der Kästchenzahldimension der entsprechenden selbstähnlichen Menge übereinstimmt. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Ähnlichkeitsabbildungen der selbstähnlichen Mengen besitzen die zugehörigen Graphen auch eine Art Selbstähnlichkeitsstruktur und wurden deshalb als selbstähnliche Graphen bezeichnet. Anhand dieser selbstähnlichen Graphen und der ebenfalls in Abschnitt 3.2 konstruierten konischen Graphen hat man Beispiele für Graphen mit beliebiger reeller Skalierungsdimension $D \geq 1$.

Alle definierten Dimensionsbegriffe erfordern Graphen mit unendlich großen Zusammenhangskomponenten, um nicht trivial zu sein. Die konkrete Untersuchung zellularer Netzwerke, die einer numerischen Simulation zugänglich und damit endlich sind, ist deshalb mit diesen Begriffen nicht möglich. Für ausreichend große und homogene Netzwerke könnten aber schon endliche Teile der Bildungsfolgen für die einzelnen Dimensionsbegriffe Hinweise auf mögliche Dimensionen geben. Es gibt zu dieser Problematik noch weitere Ideen. Man könnte etwa versuchen, endliche Graphen durch eine geeignete Vorschrift typisch fortzusetzen und dann die hier untersuchten Dimensionsbegriffe auf den resultierenden unendlichen Graphen anzuwenden. Bisher gibt es allerdings keine erfolgreiche Methode der Fortsetzung. Eine selbstähnliche Fortsetzung führt beispielsweise bei endlichen Teilen eines Gitters nicht auf die erwartete Gitterdimension und erscheint deshalb ungeeignet. Andere Fortsetzungsalgorithmen sind äußerst empfindlich gegen kleine Veränderungen des endlichen Graphen, was auch nicht den Erwartungen entspricht.
Die hier erarbeiteten Eigenschaften der vier eingeführten Dimensionsbegriffe zeigen jedenfalls, daß das Konzept einer Dimension auch ohne einen kontinuierlichen Einbettungsraum, d. h. ohne die mathematische Struktur einer Mannigfaltigkeit, aufrechterhalten werden kann. Da Graphen in vielen anderen Bereichen auch außerhalb der Physik eine große Rolle spielen, besteht die Möglichkeit, daß die gefundenen Ergebnisse auch von allgemeinerem Interesse sind.

Den zweiten Themenschwerpunkt dieser Arbeit bildeten differentialgeometrische Konzepte für Graphen. Die Motivation für diesen Teil der Arbeit war die Frage, ob man bekannte physikalische Theorien, die geometrischer Natur sind, auf den diskreten Rahmen von Graphen übertragen und damit etwa Netzwerkgesetze für zellulare Netzwerke entwickeln kann. In Kapitel 4 wurden zwei bestehende Ansätze von Dimakis und Müller-Hoissen zum einen und Requardt zum anderen ausgearbeitet. Weiterhin wurde ein eigenes Konzept vorgestellt. Es wurde deutlich, daß man bei der Übertragung der Konzepte aus dem Kontinuum auf Graphen einige Eigenschaften des Differentialkalküls verliert. Dabei unterscheiden sich die verschiedenen Ansätze u. a. dadurch, daß auf verschiedene Eigenschaften verzichtet wurde. In keinem der Ansätze gibt es eine kanonische Volumenform. In dem Ansatz von Dimakis und Müller-Hoissen wurde sowohl die graduierte Leibnizregel als auch die Relation $d^2 = 0$ erhalten. Allerdings entstanden dabei gewisse Interpretationsproblem für Formen höheren Grades. Im Ansatz von Requardt hingegen ging die Relation $d^2 = 0$ verloren. Dafür wurde die Interpretierbarkeit der höheren Formen verbessert. Der in Abschnitt 4.3 geschilderte Ansatz beinhaltet weder die Leibnizregel noch $d^2 = 0$. Dafür erreicht man aber eine sehr konkrete Korrespondenz zu den Begriffen der klassischen Differentialgeometrie im Kontinuum. Ein weiterer Unterschied zwischen den Ansätzen ist die Art der Interpretation der höheren Formen. Im Ansatz von Dimakis und Müller-Hoissen

bot sich die Interpretation als Wege im Graphen an. Diese Interpretation war aber nicht ganz konsistent. Bei Requardt ist diese Interpretation konsistent, da in diesem Ansatz eine eins-zu-eins Beziehung zwischen r-Formen und Wegen der Länge r besteht. Im Differentialkalkül in Abschnitt 4.3 hingegen sind die höheren Formen eher als sternförmige Gebilde aus Kanten zu interpretieren. Diese Interpretation liegt näher an der gewohnten Interpretation von höheren Formen als Volumenelemente in der klassischen Differentialgeometrie.
Die Bewertung der verschiedenen Alternativen ist schwierig. Es wird sich in der Zukunft zeigen müssen, welcher Rahmen am besten geeignet ist, um geometrische Theorien auf Graphen zu übertragen.

In Kapitel 5 wurde gezeigt, wie man den Euler-Lagrange-Formalismus der klassischen Feldtheorie mit Hilfe der differentialgeometrischen Konzepte aus Abschnitt 4.3 auf Graphen übertragen kann. Es wurde an dem Beispiel der Lagrangedichte eines freien komplexen Skalarfeldes gezeigt, daß der übertragene Formalismus eine konsistente Verallgemeinerung der auf Gittern üblichen Feldgleichungen liefert. Man konnte an diesem Beispiel ebenfalls erkennen, daß es möglich ist, über den Euler-Lagrange-Formalismus und geeignete Lagrangedichten Netzwerkgesetze für zellulare Netzwerke anzugeben. Diese Beobachtung eröffnet eine Vielzahl weiterer Anwendungen. So ist beispielsweise die Umwandlung bekannter physikalischer Theorien in Netzwerkgesetze für zellulare Netzwerke und die anschließende numerische Untersuchung dieser Netzwerke denkbar. In diesem Rahmen könnte dann auch untersucht werden, welche typischen Dimensionen im Sinne der im ersten Teil dieser Arbeit untersuchten Dimensionsbegriffe auftreten und ob man dimensionale Phasenübergänge in den Netzwerken beobachten kann.

Schließlich soll nicht unerwähnt bleiben, daß im Vorfeld dieser Arbeit u. a. für das in der Einleitung erwähnte einfache Netzwerkgesetz schon numerische Untersuchungen durchgeführt wurden. Die Beschränkung auf recht kleine Netzwerke, die vor allem aus Rechenzeitproblemen resultiert, kompliziert die Interpretation der Ergebnisse jedoch sehr. Die Resultate aus diesen Untersuchungen werden an anderer Stelle geschildert werden.

Literaturverzeichnis

[Arn] V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer-Verlag, New York 1978

[BCG] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, "Winning Ways for your Mathematical Plays", Vol. 2, Academic Press, New York 1982

[BiG] R. L. Bishop, S. I. Goldberg, "Tensor Analysis on Manifolds", Dover Publications, New York 1984

[Con] A. Connes, "Noncommutative Geometry", Academic Press, San Diego 1994

[Coq] R. Coqueraux, "Noncommutative Geometry and Theoretical Physics", J. Geom. Phys. **6**, 1989, pp. 425-490

[tDi] T. tom Dieck, „Topologie", deGruyter, Berlin 1991

[Die] R. Diestel, „Graphentheorie", Springer-Verlag, Berlin 1996

[DMH] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, "Discrete Differential Calculus, Graphs, Topologies and Gauge Theory", J. Math. Phys. **35**, 1994, pp. 6703-6735

[DMH2] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, et al., J. Phys. A **27**, pp. 3159-3178, 1994; J. Math. Phys. **36**, pp. 3771-3791, 1995; J. Phys. A **29**, pp. 2705-2736, 1996; J. Phys. A **29**, pp. 5007-5018, 1996; J. Phys. A **29**, pp. 6861-6876, 1996; J. Phys. A **29**, pp. 7279-7286, 1996; Lett. Math. Phys. **39**, pp. 69-79, 1997

[Fal] K. J. Falconer, "Fractal Geometry", J. Wiley & Sons, Chichester 1990

[For] O. Forster, „Analysis 3", Vieweg, Braunschweig 1984

[Ger] L. Gerritzen, „Grundbegriffe der Algebra", Vieweg, Braunschweig 1994

[Gib] P. Gibbs, "The Small Scale Structure of Space-Time: A Bibliographical Review", hep-th/9506171, 1995

[GHV] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, "Connections, Curvature, and Cohomology", Vol. 1, Academic Press, New York 1972

[Ish] C. J. Isham, "Structural Issues in Quantum Gravity", conference proceedings "Florence 1995, General relativity and gravitation", 1995, pp. 167-209, gr-qc/9510063

[Jän] K. Jänich, „Vektoranalysis", Springer-Verlag, Berlin 1992

[Kas] D. Kastler, "Cyclic cohomology within the differential envelope", Hermann, Paris 1988

[Nai] M. A. Naimark, "Normed Algebras", Wolters-Noordhoff Publications, Groningen 1972

[NRe] T. Nowotny, M. Requardt, "Dimension theory of graphs and networks", J. Phys. A **31**, 1998, pp. 2447-2463, hep-th/9707082, 1997

[Req1] M. Requardt, "Discrete Mathematics and Physics on the Planck-Scale exemplified by means of a Class of 'Cellular Network Models' and their Dynamics", erscheint in J. Phys. A, hep-th/9605103, 1996

[Req2] M. Requardt, "A New Approach to Functional Analysis on Graphs, the Connes-Spectral Triple and its Distance Function", hep-th/9708010, 1997

[Req3] M. Requardt, "Emergence of Space-Time on the Planck-Scale described as an Unfolding Phase Transition within the Scheme of Dynamical Cellular Networks and Random Graphs", hep-th/9610055, 1996

[Req4] M. Requardt, persönliche Mitteilung

[Rov] C. Rovelli, "Loop Quantum Gravity", gr-qc/9710008, 1997

[Smo] L. Smolin, "The future of spin networks", gr-qc/9702030, 1997

[Thi] W. Thirring, „Lehrbuch der Mathematischen Physik", Band 2, Springer-Verlag, Wien 1978

[Tut] W. T. Tutte, "Graph Theory", Encyclopedia of mathematics and its applications, Menlo Park, California 1984

[Wag] K. Wagner, „Graphentheorie", BI-Verlag, Mannheim 1970

[Wal] M. Walze, „Nichtkommutative Geometrie und Gravitation", Dissertation, Universität Mainz 1996

Symbolverzeichnis

$\mathcal{G} = (V, E)$	Graph, meistens ein symmetrischer Digraph, 7
V	abzählbare Menge, meistens Vertexmenge eines Graphen $\mathcal{G}$, 7
E	abzählbare Kantenmenge eines Graphen $\mathcal{G}$, 7
δ_1	Randabbildung einer Kante auf den Anfangsvertex, 7
δ_2	Randabbildung einer Kante auf den Endvertex, 7
n_i	Vertizes eines Graphen $\mathcal{G}$, 8
n_{ij}	Kanten eines Digraphen $\mathcal{G}$, 8
I	Indexmenge von V, 8
J	Indexmenge von E, 8
$\deg(n_i)$	Vertexgrad des Vertex n_i, auch v_i, 9
γ	Weg in einem Graphen, 10
$l(\gamma)$	Länge eines Weges γ, 10
$d(n_i, n_j)$	Abstand von n_i und n_j bezüglich der Länge von Wegen, 10
$\mathcal{U}_k(n_i)$	k-Vertex-Umgebung des Vertex n_i, 10
$\partial\mathcal{U}_k(n_i)$	Rand der k-Vertex-Umgebung $\mathcal{U}_k(n_i)$ des Vertex n_i, 10
$\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$	k-Kanten-Umgebung des Vertex n_i, 11
$\partial\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$	Rand der k-Kanten-Umgebung $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$ des Vertex n_i, 11
$\mathrm{NN}(j)$	Menge der Indizes aus I, die zu den nächsten Nachbarn von n_j gehören, 11
$u_k(n_i)$	Kardinalität der k-Vertex-Umgebung $\mathcal{U}_k(n_i)$ des Vertex n_i, 14
$r_k(n_i)$	Kardinalität des Randes der k-Vertex-Umgebung $\partial\mathcal{U}_k(n_i)$ des Vertex n_i, 14
$\underline{D}_S(n_i)$	untere Skalierungsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 14
$\overline{D}_S(n_i)$	obere Skalierungsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 14
$\underline{D}_C(n_i)$	untere Konnektivitätsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 14
$\overline{D}_C(n_i)$	obere Konnektivitätsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 14
$u_k^{(E)}(n_i)$	Kardinalität der k-Kanten-Umgebung $\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$ des Vertex n_i, 15

$r_k^{(E)}(n_i)$	Kardinalität des Randes der k-Kanten-Umgebung $\partial\mathcal{U}_k^{(E)}(n_i)$ des Vertex n_i, 15
$\underline{D}_S^{(E)}(n_i)$	untere Kanten-Skalierungsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 15
$\overline{D}_S^{(E)}(n_i)$	obere Kanten-Skalierungsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 15
$\underline{D}_C^{(E)}(n_i)$	untere Kanten-Konnektivitätsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 15
$\overline{D}_C^{(E)}(n_i)$	obere Kanten-Konnektivitätsdimension ausgehend vom Vertex n_i, 15
ρ	Anzahldichte der Punkte eines Bravais-Gitters im $\mathbb{R}^n$, 18
$\rho^{(E)}$	Anzahldichte der Kanten eines Bravais-Gitters im $\mathbb{R}^n$, 19
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich x, 20
$\mathcal{A}$	assoziative (kommutative) Algebra, 53
$\Omega\mathcal{A}$	universelle Differentialalgebra über $\mathcal{A}$, 53
$\Omega^r\mathcal{A}$	r-te Stufe der graduierten universellen Differentialalgebra $\Omega\mathcal{A}$, 53
d	äußere Ableitung, 54, 64 und 78
A_V	assoziative, kommutative Algebra der komplexwertigen Funktionen auf der Menge V, 56
e_i	Indikatorfunktion mit einpunktigem Träger $\{n_i\}$, 56
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, 56
$e_{i_0\ldots i_r}$	spezielle Basisvektoren von $\Omega^r\mathcal{A}_V$, 56
$\mathcal{I}$	Ideal in $\Omega\mathcal{A}_V$, 60
$\tilde{\mathcal{I}}$	Differentialideal in $\Omega\mathcal{A}_V$, 60
$\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$	globale Sesquilinearform auf Formen, 61, 72 und 85
d^*	adjungierter Operator zu d, 62, 73 und 85
Δ	Laplace-Beltrami-Operator, 63, 71 und 86
$\mathcal{C}_\mathcal{G}$	$\mathbb{N}_0$-graduierte Formenalgebra zu einem Graphen $\mathcal{G}$, 64
$\mathcal{C}_\mathcal{G}^r$	r-te Stufe von $\mathcal{C}_\mathcal{G}$, 64
$n_{i_0\ldots i_r}$	Basiselemente in $\mathcal{C}_\mathcal{G}^r$, 64
$\Delta_\mathcal{G}$	Laplace-Operator in der Graphentheorie, 72
$\mathcal{H}_r$	Hilberträume, die aus $\mathcal{C}_\mathcal{G}^r$ gebildet werden, 73, Hilberträume, die Teilmengen von $\Lambda^r T^*\mathcal{G}$ sind, 85
∂_{ij}	diskrete Richtungsableitung am Vertex n_i in Richtung Vertex n_j, 75
$T_i\mathcal{G}$	Tangentialraum am Vertex n_i eines Graphen $\mathcal{G}$, 75
$T_i^*\mathcal{G}$	Kotangentialraum am Vertex n_i, Dualraum von $T_i\mathcal{G}$, 75

$T\mathcal{G}$	diskretes Tangentialbündel eines Graphen $\mathcal{G}$, 75
$T^*\mathcal{G}$	diskretes Kotangentialbündel eines Graphen $\mathcal{G}$, 75
$\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$	Schnitte in $T\mathcal{G}$, 75
$\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$	Schnitte in $T^*\mathcal{G}$, 75
$\tilde{\partial}_{ij}$	Elementarschnitte in $T\mathcal{G}$, 76
$\tilde{d}_{ij}$	Elementarschnitte in $T^*\mathcal{G}$, 76
$\Lambda T_i^*\mathcal{G}$	Grassmann-Algebra über $T_i^*\mathcal{G}$, 77
$\Lambda^r T_i^*\mathcal{G}$	r-te Stufe von $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$, 77
$\Lambda^r T^*\mathcal{G}$	disjunkte Vereinigung der $\Lambda^r T_i^*\mathcal{G}$, 77
$\mathrm{Mult}(T_i\mathcal{G})$	Multilinearformen auf $T_i\mathcal{G}$, 77
$\mathrm{Alt}(T_i\mathcal{G})$	alternierende Multilinearformen auf $T_i\mathcal{G}$, 77
$\Lambda T^*\mathcal{G}$	disjunkte Vereinigung aller $\Lambda T_i^*\mathcal{G}$, 77
$\mathrm{Sec}(\Lambda T^*\mathcal{G})$	Schnitte in $\Lambda T^*\mathcal{G}$, 77
γ_{ij}	Paralleltransport entlang der Kante n_{ij}, 80
$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$	lokale Sesquilinearform, Metrik, 81
g_{ijk}	Komponenten der Metrik $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ in der kanonischen Basis, 82
$\tilde{g}_{ijk}$	Elementarschnitt mit Werten in den Metrikkomponenten, 82
Φ_i	von der Metrik $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ induzierter Isomorphismus zwischen $T_i\mathcal{G}$ und $T_i^*\mathcal{G}$, 82
Φ	durch punktweise Anwendung von Φ_i induzierter Isomorphismus zwischen $\mathrm{Sec}(T\mathcal{G})$ und $\mathrm{Sec}(T^*\mathcal{G})$, 82
Ψ_i	kanonischer Isomorphismus zwischen $\Lambda^r T_i^*\mathcal{G}$ und $\mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})$, 83
Ψ	durch punktweise Anwendung von Ψ_i induzierter Isomorphismus zwischen $\mathrm{Sec}(\Lambda^r T^*\mathcal{G})$ und $\mathrm{Sec}(\mathrm{Alt}^r(T^*\mathcal{G}))$, 83
Θ_i	Isomorphismus zwischen $\mathrm{Alt}^r(T_i\mathcal{G})$ und $(\Lambda^r T_i^*\mathcal{G})^*$, 83
Θ	durch punktweise Anwendung von Θ_i induzierter Isomorphismus zwischen $\mathrm{Sec}(\mathrm{Alt}^r(T\mathcal{G}))$ und $\mathrm{Sec}((\Lambda^r T^*\mathcal{G})^*)$, 83

M	n-dimensionale Mannigfaltigkeit, 90
ϕ^j	Felder, in der klassischen Feldtheorie im Kontinuum, 90, auf Graphen, 95
$\mathcal{L}$	Lagrangedichte in der klassischen Feldtheorie im Kontinuum, 90, Lagrangedichtefunktion auf Graphen, 95
$\mathcal{L}'$	Lagrangdichtefunktion, 91
ΛT^*M	Formenbündel über M, 91
$\mathcal{A}_M$	Algebra der ∞-oft reell differenzierbaren Funktionen auf M mit Werten in $\mathbb{C}$, 94
$\eta_{\mu\nu}$	Minkowski-Metrik auf dem Minkowski-Raum, 94, auf Graphen, 99

$\Box$	d'Alembert-Operator, 94
A	Viererpotential der klassischen Elektrodynamik im Kontinuum, 94
$\Box_{\mathrm{Graph}}$	d'Alembert-Operator auf einem Graphen, 101
$\partial_k^{\pm}$	diskrete partielle Ableitungen auf dem Gitter, 101
δ_k	Einheitsvektor auf dem Gitter in Richtung k, 101
$\Box_{\mathrm{Gitter}}$	d'Alembert-Operator auf einem Gitter, 102

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Priv.-Doz. Dr. M. Requardt für die Themenstellung und die intensive Betreuung sowie bei Herrn Prof. Dr. D. Buchholz für die freundliche Übernahme des Korreferats und das angenehme Klima in seiner Arbeitsgruppe. Weiterhin danke ich allen Kommilitonen für die interessanten und aufbauenden Gespräche, insbesondere W. Kunhardt für manche gemeinsame Haarspalterei und A. Schlömerkemper für ihre detaillierten Anmerkungen zum Manuskript. Schließlich gilt besonderer Dank meinen Eltern für die freundliche Unterstützung und die Finanzierung des Physikstudiums.