1 Einleitung

2 Das Netzwerk Modell

Zunächst wollen wir das Netzwerkmodell vorstellen, das Gegenstand der vorliegenden numerischen Untersuchung ist. Dazu definieren wir zunächst den Begriff des zellulären Netzwerks und führen zwei verschiedene Evolutionsgesetze ein.

Ein zelluläres Netzwerk ist geometrisch zunächst ein ungerichteter einfacher Graph im folgenden Sinn:

Definition 2.1 Ungerichteter einfacher Graph. *Ein* ungerichteter einfacher Graph *besteht aus zwei abzählbaren Mengen, der Knotenmenge N und der Bondmenge*[1] *B. Wir bezeichnen die Elemente von N mit n_i, $i \in I$, wobei $I \subset \mathbb{N}$ eine Untermenge der natürlichen Zahlen ist. Die Elemente von B werden mit b_{ik}, $i, k \in I$ bezeichnet. Die Existenz von b_{ik} impliziert die Existenz von b_{ki}.*

Anschaulich kann man sich die Knotenmenge N als Punkte vorstellen, die genau dann verbunden sind, wenn b_{ik} (und damit auch b_{ki}) existiert. Tatsächlich kann man zeigen, daß sich jeder Graph auf diese Weise in den $\mathbb{R}^3$ einbetten läßt ([**?**]).

Nun können wir den Begriff des zellulären Netzwerk definieren.

Definition 2.2 Zelluläres Netzwerk. *Ein zelluläres Netzwerk $(\mathcal{G}, s, J)$ ist ein ungerichteter, einfacher Graph mit Zustandsfunktionen s und J der Form*

$$\begin{aligned} s:\ & N \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & \qquad J:\ & B \times \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\} \\ & (n_i, \tau) \mapsto s_i(\tau) & & (b_{ik}, \tau) \mapsto J_{ik}(\tau) \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist τ die sog. Schaltzeit des Netzwerks mit Werten in $\mathbb{N}$. Die physikalische Zeit erhält man dann als eine Funktion der Schaltzeit und des „Ortes", d.h. der Knoten. Wie dies im einzelnen zusammenhängt ist noch nicht implementiert. In den numerischen Untersuchungen, die hier vorgetellt werden, war der unterliegende Graph der betrachteten Netzwerke stets ein Simplex.

Alternativ kann man die Zustandsfunktionen auch als Funktionen von $\mathbb{N}$ in den linearen Raum der Funktionen $f : N \to \mathbb{N}$, den wir mit $\mathcal{A}$ bezeichnen wollen, bzw. der Funktionen $g : B \to \{-1, 0, 1\}$, den wir $\mathcal{B}$ nennen, auffassen. Man hat dann

$$\begin{aligned} \tilde{s}:\ & \mathbb{N} \to \mathcal{A} & \qquad \tilde{J}:\ & \mathbb{N} \to \mathcal{B} \\ & \tau \mapsto s(\tau) & & \tau \mapsto J(\tau) \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

$\tilde{s}$ und $\tilde{J}$ nennt man die *adjungierten Abbildungen* zu s und J. Durch Festlegung einer *Netzwerkdynamik* und eines *Anfangszustandes* werden diese Abbildungen eindeutig bestimmt.

Definition 2.3 Assoziierter Graph. *Seien s und J Zustandsfunktionen eines zellulären Netzwerks $(\mathcal{G}, s, J)$. Der zur Zeit τ zum Netzwerk $(\mathcal{G}, s, J)$ assoziierte Graph ist $\hat{\mathcal{G}} = (N, \hat{B})$ mit $\hat{B} = \{b_{ik} \in B : J(b_{ik}, \tau) \neq 0\}$.*

Definition 2.4 Netzwerkdynamik. *Unter einer* Netzwerkdynamik *verstehen wir einen Operator T, der wie folgt definiert ist:*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ (s(\tau), J(\tau)) &\mapsto (s(\tau + 1), J(\tau + 1)) \end{aligned} \tag{3}$$

Definition 2.5 Anfangszustand. *Ein* Anfangszustand *ist die einfache Festlegung von $s(\tau_0)$ und $J(\tau_0)$ für ein τ_0.*

In der Praxis werden wir den Anfangszustand stets für $\tau_0 = 0$ angeben. Da in einer Simulation nur endliche Graphen behandelt werden können, ist die Angabe eines Anfangszustandes die explizite Angabe aller Werte $s_i(0)$ und $J_{ik}(0)$.

[1] oft auch Kanten- oder Eckenmenge

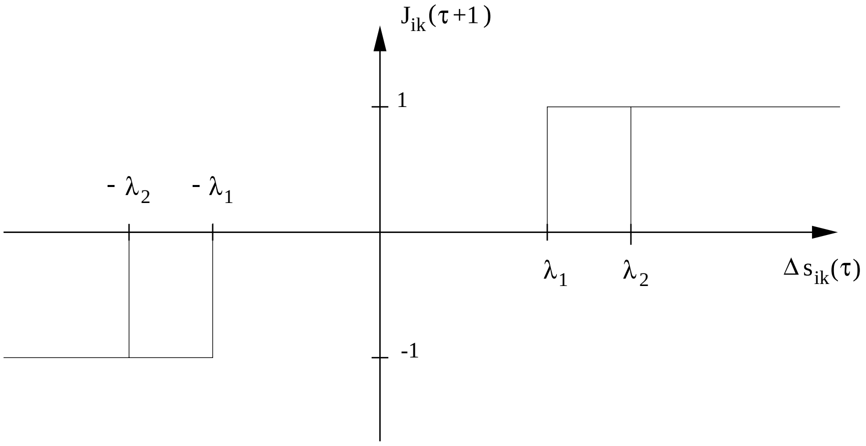


Abbildung 1: Graphische Veranschaulichung von Netzwerkgesetz eins

3 Netzwerkdynamik

In diesem Abschnitt wollen wir die beiden untersuchten Netzwerkdynamik-Gesetze vorstellen. Wir nennen sie Netzwerkgesetz eins und zwei. Sie sind wie folgt definiert. $(\Delta s_{ik} := s_i(\tau) - s_k(\tau))$

1.

$$s_i(\tau+1) = s_i(\tau) + \sum_k J_{ki}(\tau) \tag{4}$$

$$J_{ik}(\tau+1) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \Delta s_{ik} \geq \lambda_2 \\ & \text{oder} \quad \Delta s_{ik} \geq \lambda_1 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0 \\ -1 & \text{falls} \quad \Delta s_{ik} \leq -\lambda_2 \\ & \text{oder} \quad \Delta s_{ik} \leq -\lambda_1 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 1 \tag{6}$$

2.

$$s_i(\tau+1) = s_i(\tau) + \sum_k J_{ki}(\tau) \tag{7}$$

$$J_{ik}(\tau+1) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 < \Delta s_{ik} < \lambda_1 \\ & \text{oder} \quad 0 < \Delta s_{ik} < \lambda_2 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0 \\ -1 & \text{falls} \quad 0 > \Delta s_{ik} > -\lambda_1 \\ & \text{oder} \quad 0 > \Delta s_{ik} > -\lambda_2 \ \wedge \ J_{ik}(\tau) \neq 0 \\ J_{ik}(\tau) & \text{falls} \quad \Delta s_{ik} = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 1 \tag{9}$$

Wie man an den graphischen Darstellungen deutlich sieht, beinhalten die beiden Gesetze eine Art Hystereseschleife, d.h. die Werte von $J_{ik}(\tau+1)$ hängen sowohl von den $\Delta s_{ik}(\tau)$ *als auch* von ihren eigenen Werten zum Zeitpunkt τ ab.

Im folgenden soll nun das Verhalten des Netzwerkes unter diesen beiden Evolutionsgesetzen untersucht werden.

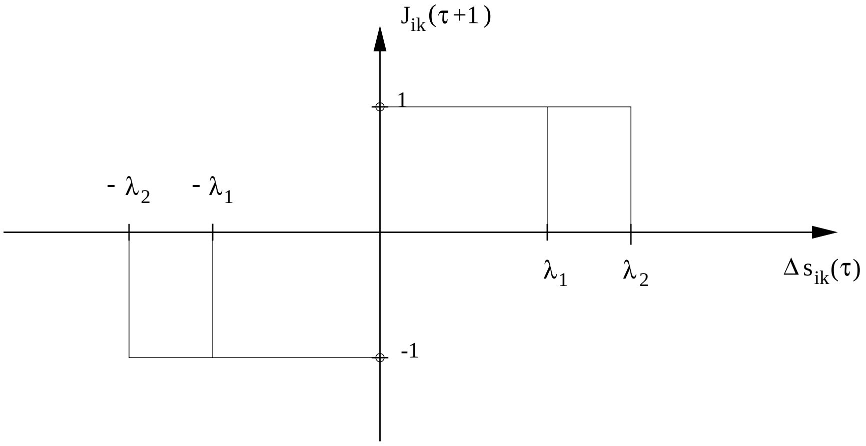


Abbildung 2: Graphische Veranschaulichung von Netzwerkgesetz zwei

4 Einführung in die Untersuchungen

Zunächst muß die Frage nach den relevanten Größen, die einen Zustand des Netzwerks beschreiben, und nach den relevanten Parametern, die ein typisches Verhalten des Netzwerks bzüglich dieser Größen bestimmen, gestellt werden. Wir haben die folgenden Eigenschaften von Netzwerkzuständen bzw. der Netzwerkdynamik im ganzen untersucht:

1. Anzahl der Zeitschritte, nach denen sich die Netzwerkzustände wiederholen, im folgenden *Zykellänge* oder einfach nur *Zykel* gennant,
2. Anzahl der Zeitschritte, bis zum ersten Mal das zyklische Verhalten eintritt, im folgenden als *Transientenlänge* oder nur *Transiente* bezeichnet,
3. Knotenwerte $s_i(\tau)$
4. Knotengrade $\deg_i(\tau)$, d.h. die Anzahl der Bonds, die inzident zu n_i sind und Werte $J_{ik}(\tau) \neq 0$ haben,
5. zeitliche Schwankungen der Knotenwerte $\Delta s_i(\tau) = s_i(\tau+1) - s_i(\tau)$,
6. zeitliche Schwankungen der Knotengrade $\Delta\deg_i(\tau) = \deg_i(\tau+1) - \deg_i(\tau)$,
7. „räumliche" Schwankungen der Knotenwerte $\Delta s_{ik}(\tau) = s_i(\tau) - s_k(\tau)$,
8. „räumliche" Schwankungen der Knotengrade $\delta\deg_{ik}(\tau) = \deg_i(\tau) - \deg_k(\tau)$,
9. Zahl und Größe der zusammenhängenden Komponenten,
10. Zahl und Größe maximaler Subsimplizes,
11. Korrelationen der Knotenwerte untereinander, $s_i(\tau)$ mit $s_j(\tau + \Delta\tau)$ für verschiedene $i, j, \Delta\tau$,
12. Korrelationen der Knotengrade, $\deg_i(\tau)$ mit $\deg_j(\tau + \Delta\tau)$ für verschiedene $i, j, \Delta\tau$
13. Korrelationen sowohl der zeitlichen als auch der räumlichen Schwankungen von Knotenwerten und Knotengraden, $\Delta s_i(\tau)$ mit $\Delta s_j(\tau+\Delta\tau)$ sowie $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $\Delta s_{il}(\tau + \Delta\tau)$ für verschiedene $i, j, k, l, \Delta\tau$,
14. Korrelationen zwischen den Werten der Bonds, $J_{ij}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau + \Delta\tau)$ für verschiedene $i, j, k, \Delta\tau$,

15. eine geschätzte Wahrscheinlichkeit p dafür, daß ein zufällig gewählter Bond Wert $\neq 0$ besitzt, basierend auf den vorgefundenen Knotengraden[2],
16. die „hamming distance“ zwischen Netzwerkzuständen, die aus nahezu identischen Anfangszuständen hervorgegangen sind[3].

Nicht alle Eigenschaften wurden für beide Netzwerkgesetze eingehend untersucht. Ebenso erhebt die obige Liste keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sicherlich sind noch einige wesentliche Eigenschaften ununtersucht geblieben.

Nachdem wir die zu untersuchenden Eigenschaften des Netzes benannt haben, wollen wir nun noch die Parameter benennen, die einen Netzwerkzustand eindeutig bestimmen und die gewählt werden müssen, bevor eine Simulation des Netzwerkverhaltens durchgeführt werden kann. Diese Parameter sind im einzelnen:

1. Netzgröße, d.h. die Anzahl der Knoten, $n := \mathrm{card}(N)$,
2. Netzwerkdynamik, hier also Netzwerkesetz eins oder zwei,
3. „Hystereseparameter“ λ_1 und λ_2 im Netzwerkgesetz,
4. Anfangszustand des Netzwerks,
5. Zeitpunkt der Beobachtung, soweit instantan beobachtbare Größen untersucht werden.

Die genannten Parameter unterliegen natürlichen Beschränkungen durch die vorhandene Computerkapazität und verfügbare Rechenzeit. Deshalb muß für jeden Parameter ein wohlüberlegter Testbereich ausgewählt werden.

1. Die Netzgrößen ist durch den Speicheraufwand auf Netze mit weniger als 10000 Knoten beschränkt. Alle größeren Netzwerke waren mit dem in den vorhandenen Computern installierten Speicher nicht darstellbar.
   Bei vielen Untersuchungen war die Netzgröße durch die Rechenzeit noch stärker beschränkt als durch den Speicherbedarf. Bei der Bestimmung von Zykellängen konnten deshalb im zweiten Modell nur Netzwerke von bis zu 15 Knoten Größe systematisch untersucht werden. Bei den einzelnen Untersuchungen soll die Komplexität der Algorithmen und die resultierenden Rechenzeiten im einzelnen diskutiert werden sofern sie von einschränkender Beudeutung sind.

2. Es wurden im wesentlichen nur die beiden schon vorgestellten Netzwerkgesetze untersucht. Dabei stellte sich bei dem zweiten Gesetz ein komplexeres und damit interessanteres Verhalten heraus als beim ersten. Deshalb wurden einige Untersuchungen dann auch nur mit dem zweiten Netzwerkgesetz durchgeführt.
   Als Alternativen für die genannten Gesetze wurden kurzzeitig auch nahezu identische Gesetze mit allerdings zyklisch geschlossenem Wertebereich für die Knoten erwogen und getestet. Es zeigten sich jedoch keine neuen interessanten Phänomene, so daß diese Variante im folgenden nicht diskutiert wird.
   Es sind darüber hinaus natürlich noch andere Gesetze denkbar, die auch leicht mit der vorhandenen Software nach geringfügigen Modifikationen untersucht werden können.

3. Die relevanten Wertebereiche für die Parameter λ_1 und λ_2 sind nur durch die Simulation selbst zu bestimmen. Die entsprechenden Überlegungen werden unten ausführlich vorgestellt.

[2] Diese Wahrscheinlichkeitsschätzung ist von Interesse, um zu untersuchen, inwiefern sich die vorgestellten deterministischen Netzwerkgesetze durch einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz mit sog. Zufallsgraphen näherungsweise beschreiben lassen.

[3] Die „hamming distance“ solcher Zustände ist für die Einschätzung der Empfindlichkeit der Dynamik auf Störungen des Anfangszustandes von Interesse.

4. Der Anfangszustand des Netzwerks wurde mit Hilfe von Zufallszahlengeneratoren erzeugt. Zu einer gewissen Kennzahl, dem sog. *seed*, wird eine deterministisch und damit reproduzierbare Reihe von sog. *Zufallszahlen* erzeugt. Diese wurden dann zur Bestimmung des Anfangszustandes verwendet. Dadurch ist der Anfangszustand zwar in gewisser Weise zufällig, aber doch für verschiedene Experimente reproduzierbar. Es wurden verschiedene seeds für die Knotenzustände und die Bondzustände verwendet. Wenn nur ein seed angegeben ist, so ist es der für die Knotenzustände und der für die Bondzustände ist einfach dieser seed um eins erhöht.
   Die Wertebereiche fü die Knoten- und Bondwerte im Anfangszustand wurden prinzipiell nach den folgenden Kriterien eingeschränkt:
   (a) Die Bonds besitzen im Anfangszustand nur Werte in $\{-1, 1\}$, d.h. der zum Anfangszustand des Netzwerks assoziierte Graph ist ein Simplex. Die Ausrichtungen ± 1 wurden mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gleichverteilt.
   (b) Die Werte s_i der Knoten im Anfangszustand wurden nach zwei verschiedenen Schemata erzeugt.
      i. Sie wurden normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung p erzeugt.
      ii. Sie wurden gleichverteilt im Bereich $-p \leq s_i(0) \leq p$ erzeugt.

   Da jedoch bei keiner der beobachteten Größen eine Abhängigkeit von der Verteilung des Anfangszustandes festgestellt werden konnte, wurde für die hier vorgestellten Untersuchungen nur noch die Gleichverteilung verwendet.
5. Die Zeitpunkte der Beobachtung wurden dem Problem entsprechend so gewählt, daß zum einen die Rechenzeit nicht zu lang wurde, zum anderen aber auch eventuelle Anfangseffekte aufgrund der möglicherweise nicht sehr natürlichen Wahl des Anfangszustandes zum Beobachtungszeitpunkt schon abgeklungen waren.

Auch bei den beobachteten Größen gibt es prinzipielle Einschränkungen. Zunächst stellt man fest, daß das Phasenraumvolumen des Phasenraums der Netzwerkzustände endlich ist. Dies bedeutet, daß das Netzwerkverhalten stets zyklisch werden muß. Die Transientenlänge und die Zykellänge sind also stets endlich. Eine grobe Abschätzung des Phasenraumvolumens durch

$$V \sim (3n+1)^n \cdot 3^{\binom{n}{2}} \tag{10}$$

zeigt, daß das Phasenraumvolumen jedoch sehr groß werden kann.[4] Also können auch sehr lange Transienten und Zykel erwartet werden.

Die Knotengrade sind in natürlicher Weise durch die maximale Anzahl der nächsten Nachbarn eine Knotens, $n-1$, nach oben und durch 0 nach unten beschränkt. Daraus ergibt sich auch eine obere Schranke für den Betrag der zeitlichen Schwankungen von s_i an einem Knoten. Dieser kann ebenfalls nur $0 \leq |\Delta s_i(\tau)| \leq n-1$ betragen.

Man sollte sich hier noch überlegen können, durch welche Schranken die s_i prinzipiell schon beschränkt sind. Dies dürfte aber für gute (=enge) Schranken durchaus nicht-trivial sein.

Aus der Abschätzung der Minimal- und Maximalwerte der s_i ergäbe sich dann auch eine Abschätzung für die räumlichen Fluktuationen $|\Delta s_{ik}(\tau)| = |s_i(\tau) - s_k(\tau)|$.

[4] n steht für die Knotenzahl. Die Abschätzung des Wertebereichs für s_i ergibt sich aus den unten geschilderten Versuchen zu $s_i \in \{-1.5\,n, \ldots, 1.5\,n\}$.

Schließlich haben Korrelationen und Wahrscheinlichkeitsabschätzungen natürlich stets Werte im Intervall $[0,1]$.

Damit schließen wir die allgemeinen Bemerkungen ab und wenden uns den einzelnen Modellen und den beobachteten Eigenschaften zu.

5 Modell eins

Zunächst müssen wir uns über die sinnvollen Wertebereiche für den Anfangsverteilungsparameter p und die Netzwerkgesetzparameter λ_1 und λ_2 in dieser Netzwerkdynamik klarwerden.

Extrem kleine p, d.h. $p \ll \lambda_1$ sind zwar eher unnatürlich, stellen aber kein größeres Problem dar. Zwar führen sie dazu, daß im ersten Schritt der Netzwerkdynamik alle Bonds abgeschaltet werden, aber da der Anfangszustand einem Simplex entspricht und durch die starke Vernetzung vermutlich ausreichend große Wertedifferenzen im ersten Schritt erzeugt werden, werden die Bonds vermutlich später wieder angeschaltet und das Netz kann einen „natürlichen" Zustand annehmen.

Ist p hingegen groß gegen λ_2, so führt dies zu einer „unnatürlichen" Anfangsphase, in der sich die anfänglich hohen Wertdifferenzen systematisch abbauen, bevor dann eine Dynamik der Bonds einsetzt und die erwartete oszillierende Dynamik der Knotenwerte beginnt. Eine solche Anfangsphase würde die Beobachtung beispielsweise der Transientenlänge verfälschen. Der Parameter p kann deshalb stets nur als $\lambda_1 \leq p \leq 1.5\,n$ sinnvoll gewählt werden. Dabei wurde schon das unten angegebene Ergebnis, daß die typischen Knotenwerte ungefähr zwischen $\pm 1.5\,n$ liegen, verwendet.

Die Form der Anfangsverteilung wurde auf Gleichverteilung fixiert, weil wie oben schon erwähnt keinerlei Unterschiede bei den verschiedenen Verteilungsformen feststellbar waren.

Nun wollen wir die Wirkungen der Parameter λ_1 und λ_2 betrachten und ihre relevanten Wertebereiche abschätzen. Die stärkeren Auswirkungen auf die Netzwerkdynamik hat offensichtlich die Wahl von λ_1, da dies die Abschaltung von Bonds bestimmt und damit sehr restriktiv in die Dynamik eingreift. λ_2 ist dann schon durch λ_1 von unten beschränkt und regelt nur das Wiederanschalten der Bonds. Das bedeutet aber, daß es nur für schon abgeschaltete Bonds überhaupt eine Bedeutung besitzt. Werden also aufgrund der Wahl von λ_1 nur sehr wenig Bonds abgeschaltet, so hat die Wahl von λ_2 nur marginale Auswirkungen auf die Dynamik. Wir werden das später an den Ergebnissen sehen können.

Zur Wahl der Wertebereiche für λ_1 muß man sich überlegen, wie groß die zu erwartenden räumlichen Fluktuationen der Knotenwerte sind. Diese hängen mit Sicherheit von der Größe des Netzes ab. Wir haben oben mit BLABLA schon versucht, eine obere Schranke anzugeben. Ausprobieren mit diversen Parametereinstellungen ergab jedoch, daß die Fluktuationen nur im Bereich $-3n \leq |\Delta s_{ik}(\tau)| \leq 3n$ liegen. Wählt man λ_1 größer als die zu erwartenden räumlichen Fluktuationen, werden alle Bonds abgeschaltet und die Netzwerkdynamik kommt zum Stillstand. Does liefert schon eine Obergrenze $\lambda_1 \leq e\,n$ für nicht-triviale Netzwerkdynamik.

In einem ersten Versuch haben wir die Obergrenze für λ_1, die noch eine nicht-triviale Netzwerkdynamik erlaubt, in Abhängigkeit von der Netzgröße n direkt bestimmt. Dabei wurde der für nichttriviales Verhalten günstigste Fall $\lambda_2 = \lambda_1$ gewählt und beobachtet ab welchem λ_1 zu fester Netzgröße n der Grad aller Knoten identisch Null wird. Abbildung 3 zeigt das Ergebnis.

Wir wählen also im folgenden $\lambda_1 \lesssim 1/2\,n$, sowie $\lambda_2 \lesssim 1/2\,n$.

5.1 Allgemeine Größenordnungen

In diesem Abschnitt werden die oberen und unteren Schranken aller beobachteten Netzwerkeigenschaften untersucht. Dabei erstreckt sich die Untersuchung natürlich nicht auf Größen wie etwa bei Korrelationskoeffizienten, deren Schranken ohnehin festliegen. Die oberen und unteren Schranken werden für möglichst viele sinnvolle Parameterkombinationen, jedoch zu fester Netzgröße n bestimmt, da diese offen-

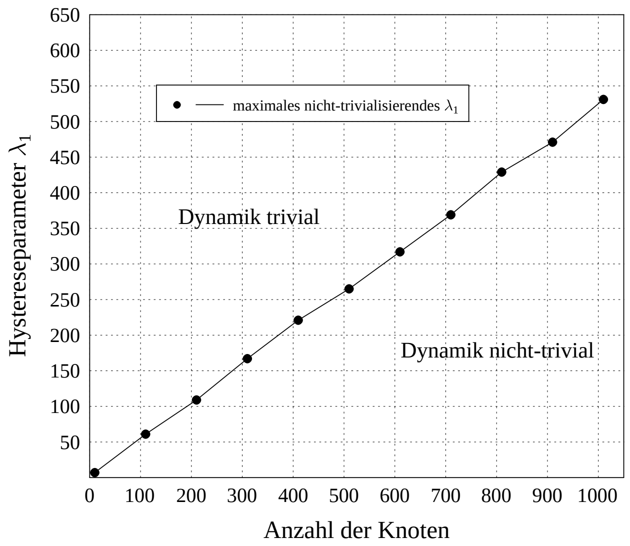


Abbildung 3: Die maximalen Werte für λ_1, die bei gegebenem n nichttriviales Verhalten erzeugen ($\lambda_2 = \lambda_1$)

Parameter	Wertebereich
Netzgröße n	$n = 10 + 100k$, $k = 0, \ldots, 10$
Anfangswertparameter p	$p = \frac{1}{2}n$
Hystereseparameter λ_1	$\lambda_1 = \frac{1}{50}k \cdot n$, $k = 1, \ldots, 25$
Hystereseparameter λ_2	$\lambda_2 = \frac{1}{50}k \cdot n$, $k = 1, \ldots, 25$
seed s	$s = 1777 + 11k$, $k = 0, \ldots, 19$
Beobachtungszeit τ	$\tau = 20, \ldots, 30$

Tabelle 1: Wertebereiche der Parameter, über die gemittelt wurde, um typische Größenordnungen festzustellen.

sichtlich eine ausgezeichnete Rolle spielt. In Tabelle 1 sind die verwendeten Parameterbereiche aufgelistet.

Die Bezeichnungen für die einzelnen Beobachtungsgrößen können etwas verwirrend sein. Deshalb wollen wir sie hier noch einmal explizit erklären. Ist von einem Mittel- oder Durchschnittswert die Rede, etwa vom *durchschnittlichen Knotenwert*, so bezieht sich dies zunächst auf eine Mittelung über alle Knoten zu sonst festen Parametern, insbesondere zu fester Zeit. Steht dann noch ein weiteres Adjektiv, etwa mittlerer Durchschnittswert der Knoten, so bezieht sich dies auf eine Mittelwert-, Maximums- oder Minimumsbildung der Mittel-, Maximums- oder Minimumswerte bezüglich der Knoten zu festen Parametern bezüglich aller in Tabelle 1 aufgeführten Parameterwerte.

Die Mittel-, Maximums- und Minimumswerte der Größen und die Standardabweichung von diesen Mittelwerten sind in den Abbildungen 4 bis 7 dargestellt. Die Fehlerbalken (Standardabweichung) der Mittelwerte bezüglich der Parametermittelung der jeweiligen Größen sind so klein, daß sie im Maßstab der Darstellung nicht sichtbar sind.

Die Durchschnittswerte müssen sehr vorsichtig bewertet werden, da sie sehr empfindlich davon abhängen, über welche Parameterbereiche gemittelt wurde. Da die Wahl von Parameterbereichen aber stets willkürlich bleiben muß, kann man nur

Untersuchte Größe	Min.	Max.	Mittel
Werteanzahl $s_i(\tau)$	$0.05\,n$	$0.85\,n$	$0.3\,n$
Minimum $s_i(\tau)$	$-1.52\,n$	0	$-0.85\,n$
Maximum $s_i(\tau)$	$0.05\,n$	$1.52\,n$	$0.85\,n$
Durchschnitt $s_i(\tau)$	klein	klein	klein
$\sigma(s_i(\tau))$	klein	$0.88\,n$	$0.5\,n$
Werteanzahl $\Delta s_i(\tau)$	1	$0.77\,n$	$0.15\,n$
Minimum $\Delta s_i(\tau)$	$-n$	0	$-0.78\,n$
Maximum $\Delta s_i(\tau)$	0	n	$0.78\,n$
Durchschnitt $\Delta s_i(\tau)$	0	0	0
$\sigma(\Delta s_i(\tau))$	0	$0.58\,n$	$0.53\,n$
Werteanzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$	$0.2\,n$	$2.8\,n$	$1.4\,n$
Minimum $\Delta s_{ik}(\tau)$	0	0	0
Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$	$0.2\,n$	$3\,n$	$1.7\,n$
Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$	klein	n	$0.55\,n$
$\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$	0	$0.71\,n$	?
Werteanzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	1	$2.7\,n$	$1.2\,n$
Minimum $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	$1.55\,n$	$0.1\,n$
Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	$0.2\,n$	$3\,n$	$1.7\,n$
Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	$1.6\,n$	$0.7\,n$
$\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$, $J_{ik} \neq 0$	0	$0.71\,n$	?

Tabelle 2: Geschätzte Gesetzmäßigkeiten für die vermuteten linearen Zusammenhänge zwischen den beobachteten Größen und der Netzgröße

hoffen, daß der gewonnene Eindruck nicht irreführend ist. Eine sichere Beurteilung wird erst bei der genaueren Untersuchungen aller Abhängigkeiten der beobachteten Größen von den Parametern möglich. Dies wird in den folgenden Abschnitten weiter vertieft werden. Zunächst wollen wir jedoch die vorgestellten Ergebnisse kommentieren.

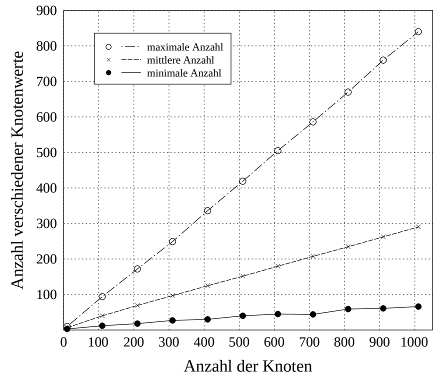
5.1.1 Bemerkungen zu den Knotenwerten

Die Ergebnisse zu den Knotenwerten sind in den Abbildungen 4 bis 7 dargestellt. Es fällt dabei zunächst auf, daß fast alle untersuchten Größen linear mit der Netzgröße anwachsen. Dies gilt sogar sowohl für die minimal und maximal auftretenden Werte als auch für die Durchschnittswerte. Auf Ausnahmen von dieser Regel kommen wir unten noch zu sprechen. Die Abschätzungen für die linearen Zusammenhänge, die man aufgrund dieser Ergebnisse vermuten muß, sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

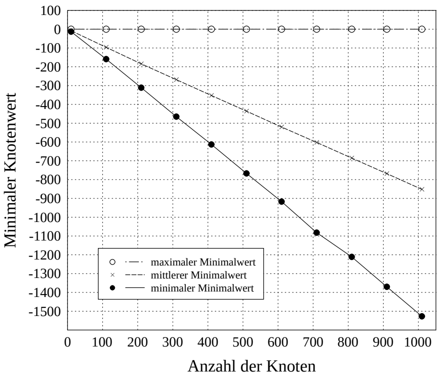
Die Anzahl verschiedener Knotenwerte, Abbildung 4(a) schöpft beinahe den gesamten möglichen Wertebereich aus. Allerdings liegt sie im Durchschnitt deutlich unter der maximal möglichen Anzahl. Dies läßt darauf schliessen, daß Knotenwerte recht häufig doppelt vorkommen und somit auch für minimales λ_1 Bonds abgeschaltet werden. Das Minimum nahe Null zeigt, daß es durchaus auch extrem homogene Zustände des Netzes geben kann, in denen fast alle Knotenwerte gleich sind.

In den Abbildungen 4(b) und 4(c) sieht man deutlich, daß die Minimal- und Maximalwerte symmetrisch um die Null verteilt sind. Weiterhin zeigt der relativ kleine bzw. große Durchschnittswert, daß sehr schmale Verteilungen, also solche mit Knotenwerten in einem schmalen Intervall um Null, eher selten sind. Dieser Eindruck wird auch durch den im Vergleich zu ihrem Minimum und Maximum relativ großen Mittelwert der Standardabweichung bestätigt.

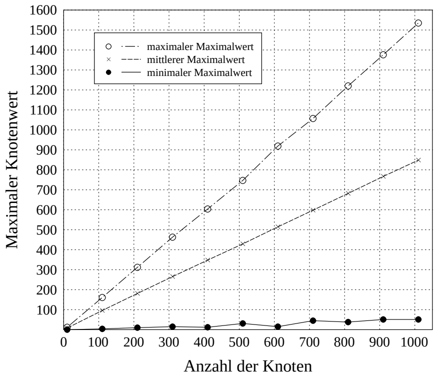
In Abbildung 4(d) ist der Mittelwert der Knotenwerte dargestellt. Wir habe schon gesehen, daß dieser Mittelwert während der Zeitentwicklung konstant bleibt.



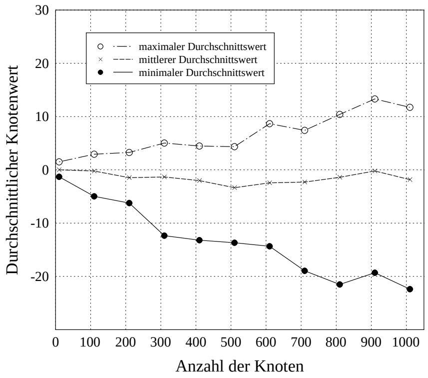
(a) Anzahl verschiedener Knotenwerte



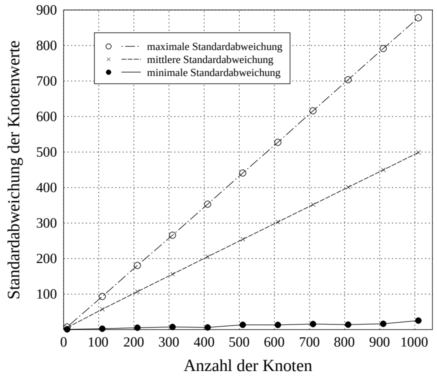
(b) Minimum der Knotenwerte



(c) Maximum der Knotenwerte

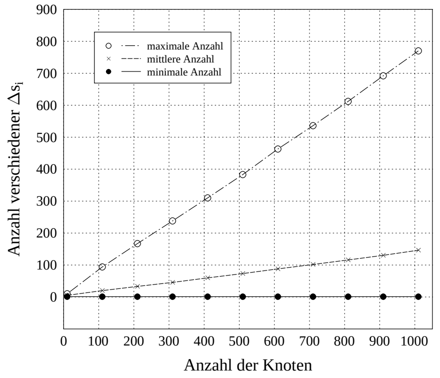


(d) Durchschnitt der Knotenwert

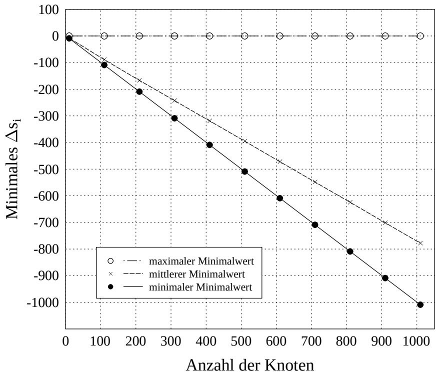


(e) Standardabweichung der Knotenwerte

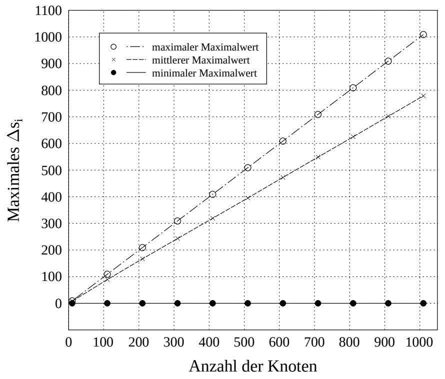
Abbildung 4: Multiplizität, Minimum, Maximum und Durchschnittswert der Knotenwerte in Abhängigkeit von der Netzgröße



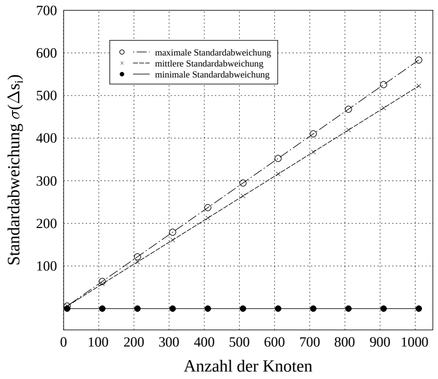
(a) Anzahl verschiedener $\Delta s_i(\tau)$



(b) Minimum der $\Delta s_i(\tau)$



(c) Maximum der $\Delta s_i(\tau)$

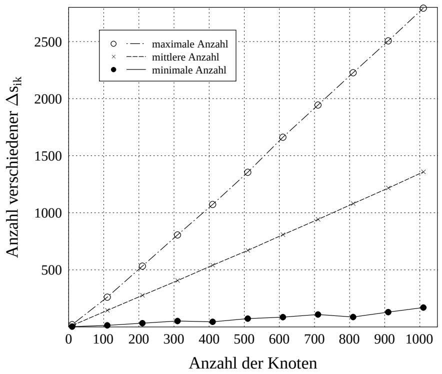


(d) $\sigma(\Delta s_i(\tau))$

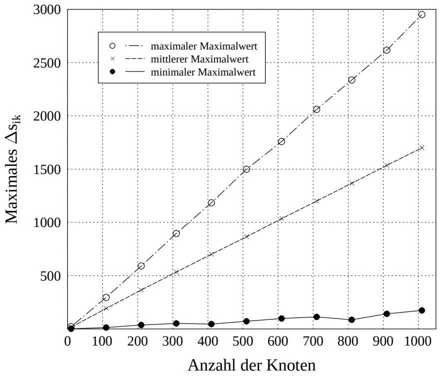
Abbildung 5: Multiplizität, Minimum, Maximum und Standardabweichung vom Durchschnittswert der zeitlichen Schwankungen $\Delta s_i(\tau)$ in Abhängigkeit von der Netzgröße

Weiterhin sollte dieser Mittelwert bei vollständig symmetrischen Anfangsverteilungen für die Knotenwerte genau Null sein. Die in Abbildung 4(d) dargestellten Werte liefern also eine Einschätzung für die Qualität der Anfangsverteilungen, die durch einen Zufallsgenerator erzeugt wurden. Bedenkt man die Größe der Knotenwerte bei der Erzeugung des Anfangszustands und jeweils die Anzahl der erzeugten Werte, so erscheint die Größe der Abweichung von Null akzeptabel. Es sollte vielleicht auch erwähnt werden, dass die Zentrierung der Anfangsverteilung um Null nicht essentiell für das Verhalten des Netzwerks ist, da das Netzwerkgesetz invariant unter Verschiebung aller Knotenwerte um eine feste Zahl ist. Es ist in diesem Sinne translationsinvariant.

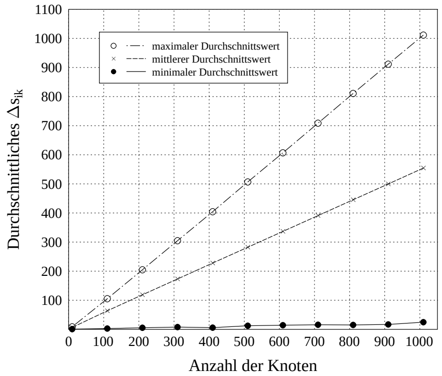
Die in Abbildung 5 dargestellten Ergebnisse liefern einen Eindruck über die Art der durch Netzwergesetz eins erzeugten Dynamik. Der kleine Mittelwert der Anzahl verschiedener $\Delta s_i(\tau)$ (Abbildung 5(a)) legt nahe, daß die Dynamik oft global in gleicher Art erfolgt, also daß eine homgene Bewegung von Gruppen von Knoten erkennbar sein müßte. Abbildungen 5(b) und 5(c) zeigen zusätzlich, daß insbesondere große zeitliche Schwankungen bevorzugt sind. wie etwa bei Korrelationskoeffizienten



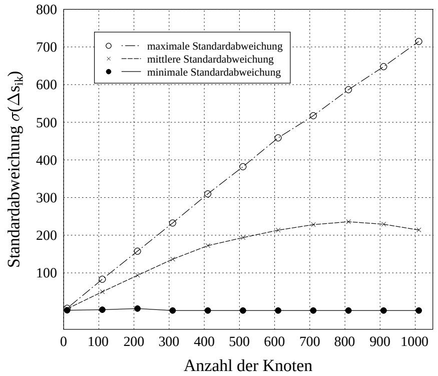
(a) Anzahl verschiedener $\Delta s_{ik}(\tau)$



(b) Maximum der $\Delta s_{ik}(\tau)$



(c) Durchschnitt der $\Delta s_{ik}(\tau)$



(d) $\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$

Abbildung 6: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta s_{ik}(\tau)$ in Abhängigkeit von der Netzgröße.

Aus der Theorie folgt, daß die Summe aller $\Delta s_i(\tau)$ zu einem festen Zeitpunkt τ stets Null sein muß. Dies liefert natürlich auch das Experiment. Aus diesem Grund ist der Durchschnittswert der $\Delta s_i(\tau)$ nicht dargestellt.

In diesem Zusammenhang überrascht es dann auch nicht, daß die Standardabweichung der $\Delta s_i(\tau)$, dargestellt in Abbildung 5(d), im Mittelwert sehr groß ist, da, wie schon gesehen, recht große $\Delta s_i(\tau)$ bevorzugt sind und die Summe aller positiven Werte gleich der aller negativen Werte sein muß. Damit gibt es immer vergleichbar große Häufigkeiten von Werten größer und kleiner Null mit Schwerpunkten relativ weit von Null entfernt und folgerichtig eine große Standardabweichung.

Zusammenfassend läßt sich also feststellen daß die Dynamik im Netzwerk zu sehr großen zeitlichen Fluktuationen führt.

Abbildung 6 beschäftigt sich mit den räumlichen Fluktuationen $\Delta s_{ik}(\tau)$ der Knotenwerte. Die Ergebnisse sind bis auf die Standardabweichung der $\Delta s_{ik}(\tau)$ vom Mittelwert wenig spektakulär.

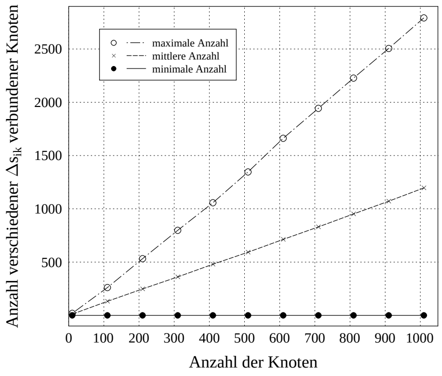
Die Anzahl verschiedener Werte schöpft den möglichen Wertebereich von bis zu $n(n-1)/2$ verschiedenen Werten nicht annähernd aus, wie man in Abbildung 6(a) sieht. Dies ist natürlich dadurch zu erklären, daß die Knotenwerte zu beschränkt sind und deshalb nicht beliebig viele Fluktuationswerte zulassen. So sieht man leicht, daß Knotenwerte im Intervall $[-1.5n, 1.5n]$ Fluktuationswerte im Bereich $[0, 3n]$ implizieren. Dadurch wird die Anzahl möglicher Werte automatisch begrenzt.

Auch die Maximalwerte der Fluktuationen sind in diesem Sinne mit den Maxima der Knotenwerte verträglich. Die Minimalwerte der Fluktuationen waren stets Null und sind deshalb nicht dargestellt. Dies ist ein weiterer Hinweis auf mehrfach auftretende Knotenwerte wie auch schon bei der Anzahl der verschiedenen Knotenwerte gesehen.

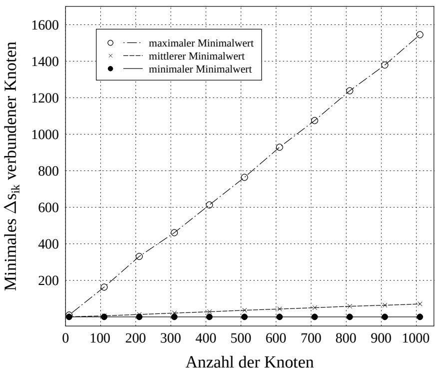
Die einzige Überraschung bietet die Standardabweichung der $\Delta s_{ik}(\tau)$ vom Mittelwert. Sie steigt im Mittelwert nicht linear mit der Netzgröße an. Dies läßt vermuten, daß die Verteilung der $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit wachsender Netzgröße immer enger wird. Das würde bedeuten, setzte dieser Trend sich zu immer größeren Netzgrößen fort, daß große Netzwerke ziemlich einheitliche räumliche Fluktuationen besäßen. Die räumlichen Fluktuationen hätten einen zu festen Zeiten global einheitlichen Wert.

Die bisher besprochenen räumlichen Fluktuationen in Abbildung 6 berücksichtigten alle Paare $\{s_i(\tau), s_k(\tau)\}$ von Knotenwerten. Es ist interessant zu untersuchen, ob und inwiefern sich die Ergebnisse verändern, berücksichtigt man nur die Werte *verbundener Knoten*. Die Ergebnisse dazu sind in Abbildung 7 dargestellt.

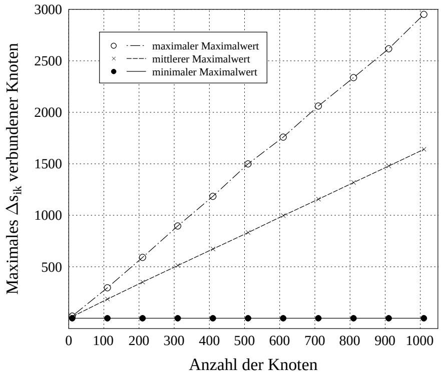
Als wesentlicher Unterschied fällt ins Auge, dass nun das Minimum der räumlichen Fluktuationen nicht mehr immer Null ist (s. Abbildung 7(b)). Dies erscheint plausibel, weil Knoten mit identischen Werten sofort nach Auftreten dieser identischen Werte getrennt werden. Damit sind die Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten im Mittel etwas größer und ihr Minimum manchmal nicht Null. Dieser Effekt läßt sich auch an den größeren Durchschnittswerten in Abbildung 7(d) leicht erkennen. Die Standardabweichung hingegen fällt auch hier bei steigender Knotenzahl wieder ab. Der Effekt ist zwar etwas schwächer als zuvor aber immer noch deutlich (Abbildung 7(e)).



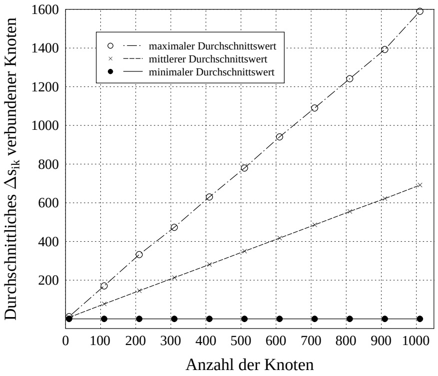
(a) Anzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



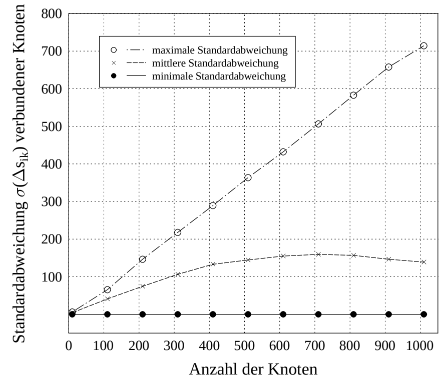
(b) Minimum $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(c) Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(d) Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(e) $\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 7: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta s_{ik}(\tau)$ zwischen *verbundenen* Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.

Untersuchte Größe	Min.	Max.	Mittel
Werteanzahl $\deg_i(\tau)$	1	$0.2\,n$	$0.04\,n$
Minimum $\deg_i(\tau)$	0	0	0
Maximum $\deg_i(\tau)$	$n-1$	$n-1$	$n-1$
Durchschnitt $\deg_i(\tau)$	0	$0.7\,n$	$n-1$
$\sigma(\deg_i(\tau))$	0	$0.27\,n^*$	$0.05\,n$
Anzahl abgeschalteter Bonds	klein	$0.15\,n^2$	$0.5\,n^2$
Geschätztes p	0	1	0.7
Werteanzahl $\Delta\deg_i(\tau)$	1	$0.25\,n^*$	$0.03\,n$
Minimum $\Delta\deg_i(\tau)$	$-n$	$0.55\,n$	$-0.01\,n$
Maximum $\Delta\deg_i(\tau)$	$-0.55\,n$	n	$0.01\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_i(\tau)$	$-0.6\,n$	$0.6\,n$	0
$\sigma(\Delta\deg_i(\tau))$	0	$0.27\,n^*$	$0.05\,n$
Werteanzahl $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	1	$0.55\,n^*$	$0.1\,n$
Minimum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	0	0
Maximum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	$n-1$	$0.22\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	$0.25\,n^*$	$0.05\,n$
$\sigma(\Delta\deg_{ik}(\tau))$	0	?	?
Werteanzahl $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	1	$0.55\,n^*$	$0.08\,n$
Minimum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	n	klein
Maximum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	n	$0.25\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	n	$0.08\,n$
$\sigma(\Delta\deg_{ik}(\tau))$, $J_{ik} \neq 0$	0	?	?

Tabelle 3: Geschätzte Gesetzmäßigkeiten für die vermuteten linearen Zusammenhänge zwischen den beobachteten Größen und der Netzgröße, die mit * gekennzeichneten Angaben beziehen sich auf Diagramme, die nicht ganz offensichtlich lineares Verhalten zeigen und sind daher eher unpräzise Schätzungen.

5.1.2 Bemerkungen zu den Knotengraden

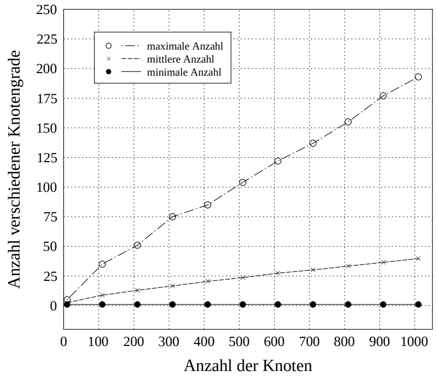
Wie schon bei den Knotenwerten skalieren auch hier fast alle Eigenschaften linear mit der Größe des Netzwerks. In Tabelle 3 sind die entsprechenden Schätzwerte angegeben.

Im einzelnen lassen sich folgende Beobachtungen machen. Die maximal mögliche Anzahl verschiedener Knotengrade ist n, nämlich Knotengrad 0 bis $n-1$. Diese Zahl wird zu festen Zeitpunkten nie voll ausgeschöpft wie Abbildung 8(a) zeigt. Allerdings war dies auch nicht zu erwarten, da dann ja jeder Knoten einen anderen Grad haben müßte, was einem sehr speziellen Zustand entspricht. Der Mittelwert für die Anzahl der Knotengrade liegt dann nochmals deutlich unter dem Maximalwert. Dies ist ein Hinweis darauf, daß relativ „homogene“ Knotengradverteilungen dominieren. Die untere Schranke für die Anzahl der Knotengrade wird mit dem Wert 1 immer ausgeschöpft. Vermutlich tragen Zustände mit dem Knotengrad 0 für alle Knoten dazu bei.

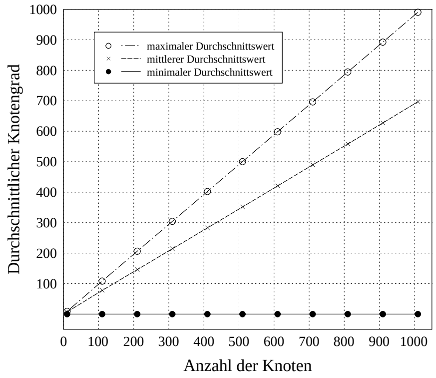
Der beobachtete Maximalwert der Knotengrade ist stets der durch die obere Schranke $n-1$ gegebene und zwar im Minimum, Maximum Null war und Durchschnitt der vorgenommenen Mittelung. Deshalb wurde dieser Wert nicht dargestellt. Ähnliches gilt für den Minimalwert. Dieser ist stets 0 und wurde ebenso nicht dargestellt.

Die Standardabweichung der Knotengrade vom Mittelwert verhält sich ähnlich wie die Zahl der verschiedenen Knotengrade. Also dominieren weder extrem große noch extrem kleine Abweichungen vom Mittelwert.

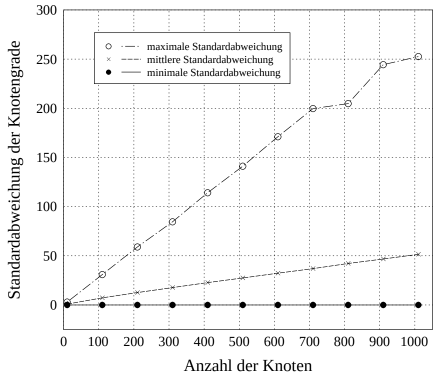
In Abbildung 8(d) ist die Anzahl der abgeschalteten Bonds aufgetragen. Sie



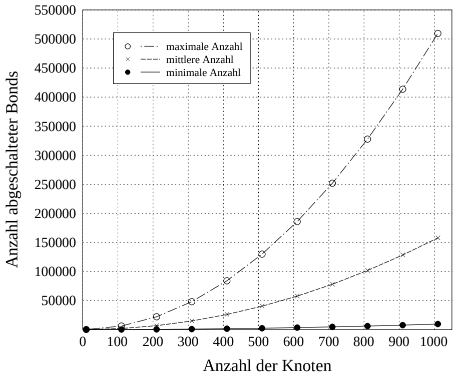
(a) Anzahl verschiedener Knotengrade



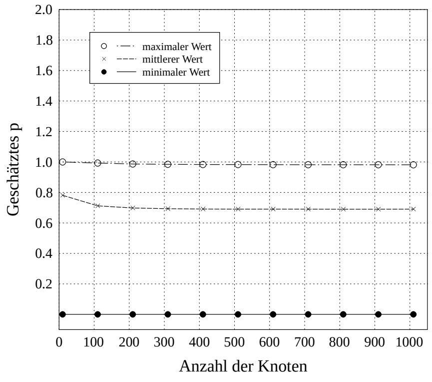
(b) Durchschnitt der Knotengrade



(c) Standardabweichung der Knotengrade



(d) Anzahl abgeschalteter Bonds



(e) Geschätzte "An-Wahrscheinlichkeit" p

Abbildung 8: Multiplizität, Durchschnitt, Standardabweichung der Knotengrade, Anzahl der abgeschalteten Bonds und geschätzte Wahrscheinlichkeit für einen Bond, "an" zu sein.

wächst linear mit der Anzahl der Bonds also ungefähr quadratisch mit der Anzahl der Knoten. Diesen Eindruck verstärkt auch die Beobachtung, daß die geschätzte Wahrscheinlichkeit, daß ein Bond angeschaltet ist, im Mittel konstant bei 0.7 bleibt. Weiterhin sieht man in der zugehörigen Abbildung 8(e) an den Minimal- und Maximalwerten, daß der gewählte Parameterbereich für λ_1 und λ_2 mehr oder weniger alle Möglichkeiten der An- und Abschaltung von Bonds ausschöpft.

Bei den zeitlichen Fluktuationen der Knotengrade $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ (Abbildung 9(a)) fällt auf, daß der Mittelwert der Anzahl verschiedener $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ ziemlich gering ist. Dies deutet auf typische zeitliche Fluktuationen hin, d.h. zu einem Zeitpunkt τ scheinen nur wenig verschiedene Gradveränderungen stattzufinden. Der Grund für diese Beobachtung könnte aber auch sein, daß viele Zustände mit praktisch keinen Gradveränderungen zum Mittelwert beitragen.

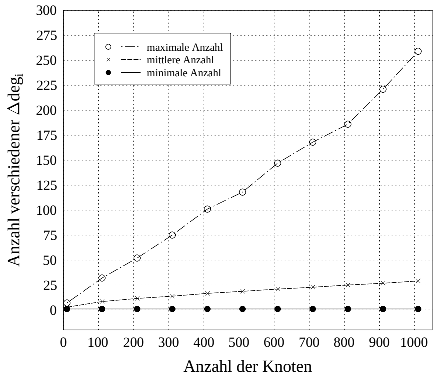
An den Darstellungen der minimalen und der maximalen zeitlichen Fluktuation in Abbildung 9(b) und 9(c) wird deutlich, daß es immer auch Zustände gibt, in denen alle Knotegrade zunehmen bzw. Zustände, in denen alle Knotengrade abnehmen. Dies sieht man daran, daß die maximale Minimalfluktuation deutlich größer und die minimale Maximalfluktuation deutlich kleiner Null ist. Es gibt demzufolge sowohl Zeitpunkte τ_z, an denen die Vernetzung global (stark) zunimmt, als auch Zeiten τ_a, an denen die Vernetzung global (stark) abnimmt.

Aus der Darstellung der Durchschnittswerte für die zeitlichen Fluktuationen (Abbildung 9(d)) sieht man, daß im Mittel alle Fluktuationen ausgeglichen sind. Dies war nicht anders zu erwarten, da sowohl eine untere als auch eine obere Schranke für die Knotengrade besteht und somit nur eine Oszillation der Knotengrade zwischen diesen Werten möglich ist. Wiederum machen die Maximal- und Minimalwerte deutlich, daß trotzdem Zustände mit starker globaler zeitlicher Knotengradfluktuation existieren.

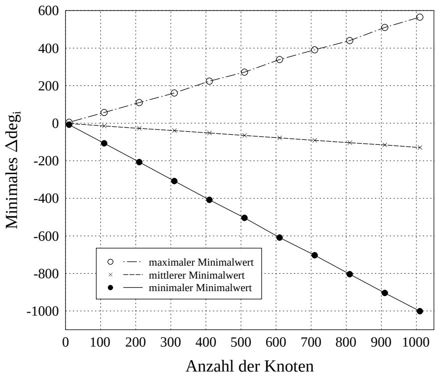
In Abbildung 10 sind die Größenordnungen der räumlichen Fluktuationen der Knotengrade dargestellt. Die in Abbildung 10(a) dargestellte Anzahl verschiedener Knotengradfluktuationen bleibt wie auch schon bei den Knotenwertfluktuationen weit hinter der prinzipiellen oberen Schranke zurück. Andererseits wird die untere Schranke von 1 wieder vollständig ausgeschöpft. Auch hier läßt sich vermuten, daß dies durch Zustände mit Knotengrad 0 an jedem Knoten geschieht.

Das minimale $\Delta\deg_{ik}$ ist hier nicht dargestellt, weil es stets, in Minimum, Maximum und Durchschnitt, Null war. Das heißt, daß es in unserer Stichprobe immer Knoten mit identischen Graden gegeben hat. An der Darstellung des maximalen $\Delta\deg_{ik}$ Abbildung 10(b) sieht man, daß hier der mögliche Wertebereich voll ausgeschöpft wird. Von maximal $n-1$ bis minimal 0 treten alle Werte auf.

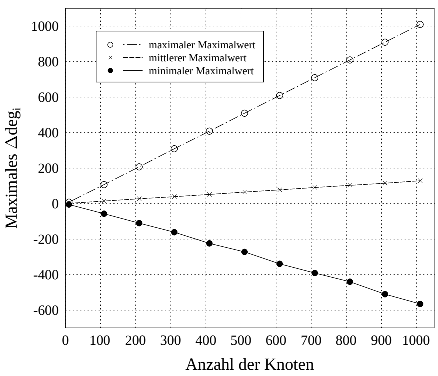
Der entscheidende Unterschied der der Größenordnungen der Knotengradfluktuationen zwischen verbundenen Knoten zu denen zwischen allen Knoten ist, daß der Minimalwert nicht immer Null ist. Zumindest der maximal auftretende Minimalwert ist proportional n und somit recht groß während der mittlere und minimal auftretende Wert immer noch annähernd Null sind. Der Durchsachnittswert liegt ebenfalls deutlich höher, insbesondere der maximale Durchschnittswert. Bei der Standardabweichung hingegen ist das Bild sehr ähnlich zu dem der räumlichen Fluktuationen zwischen allen Knoten. Auch hier sieht man einen Abfall des Mittelwerts bei größeren Netzgrößen.



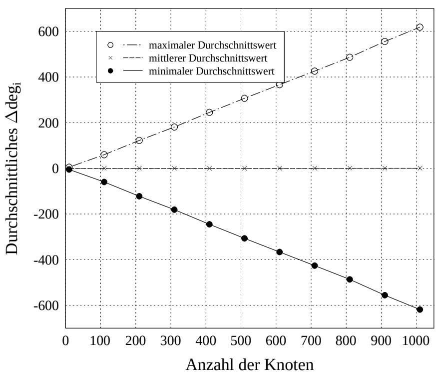
(a) Anzahl $\Delta\mathrm{deg}_i(\tau)$



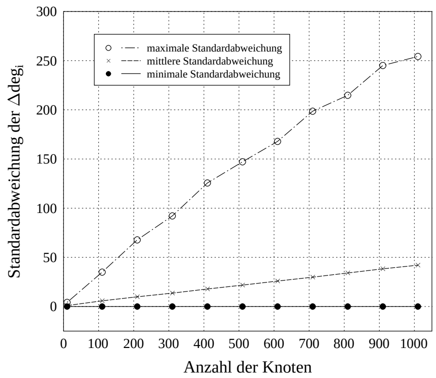
(b) Minimum $\Delta\mathrm{deg}_i(\tau)$



(c) Maximum $\Delta\mathrm{deg}_i(\tau)$

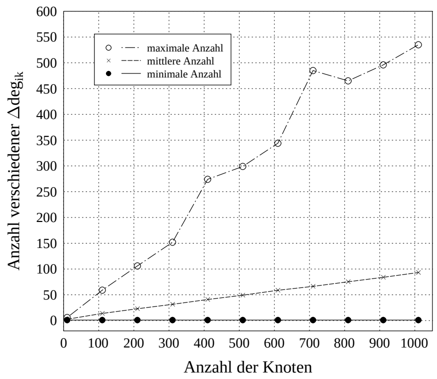


(d) Durchschnitt $\Delta\mathrm{deg}_i(\tau)$

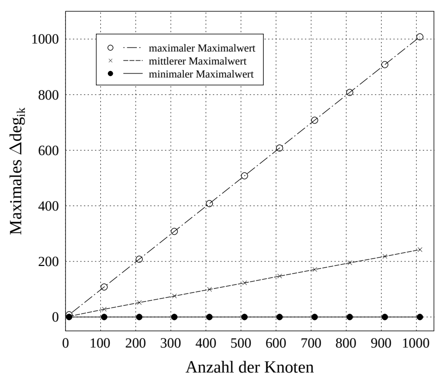


(e) $\sigma(\Delta\mathrm{deg}_i)(\tau)$

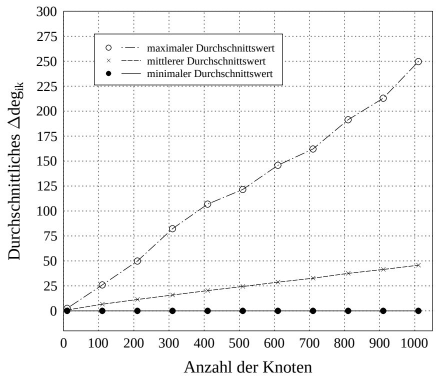
Abbildung 9: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der zeitlichen Schwankungen $\Delta deg_i(\tau)$ an den Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.



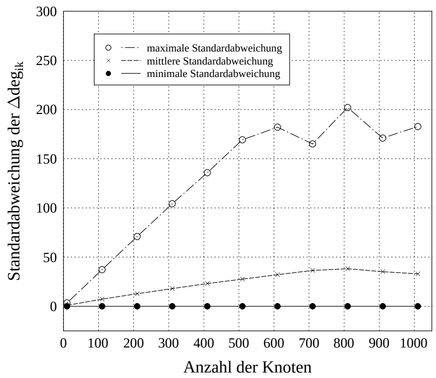
(a) Anzahl $\Delta\mathrm{deg}_{ik}(\tau)$



(b) Maximum $\Delta\mathrm{deg}_{ik}(\tau)$

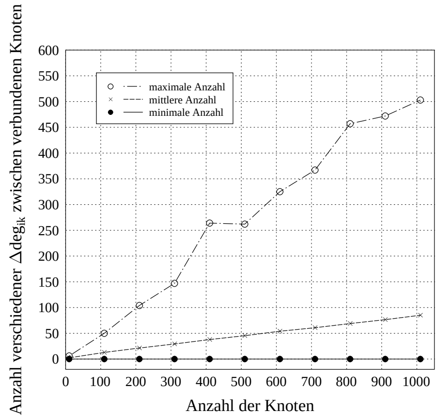


(c) Durchschnitt $\Delta\mathrm{deg}_{ik}(\tau)$

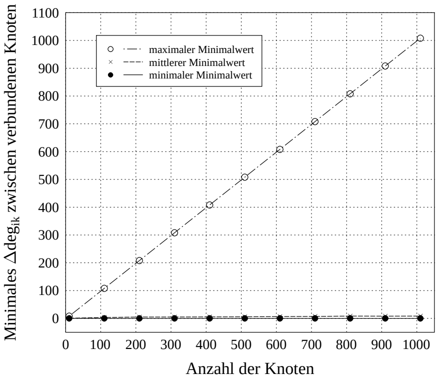


(d) $\sigma(\Delta\mathrm{deg}_{ik})(\tau)$

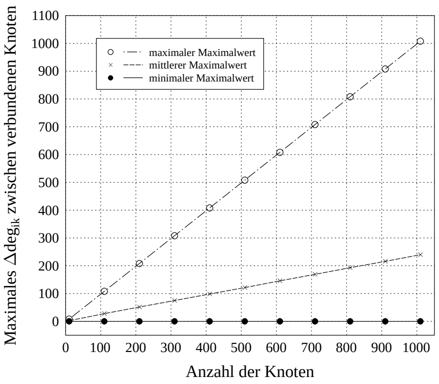
Abbildung 10: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta deg_{ik}(\tau)$ zwischen Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße. Auf die Darstellung der Minimalwerte wurde verzichtet, da die Extrema und der Durchschnitt dieser Minimalwerte stets identisch Null waren.



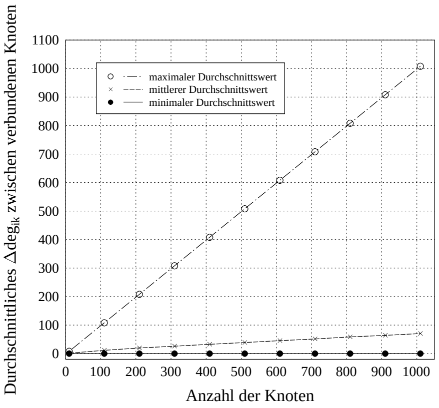
(a) Anzahl $\Delta \deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



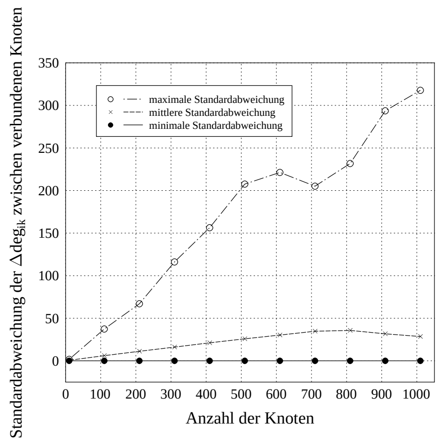
(b) Minimum $\Delta \deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(c) Maximum $\Delta \deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(d) Durchschnitt $\Delta \deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(e) $\sigma(\Delta \deg_{ik})(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 11: Multiplizität, Minimum, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta deg_{ik}(\tau)$ zwischen *verbundenen* Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.

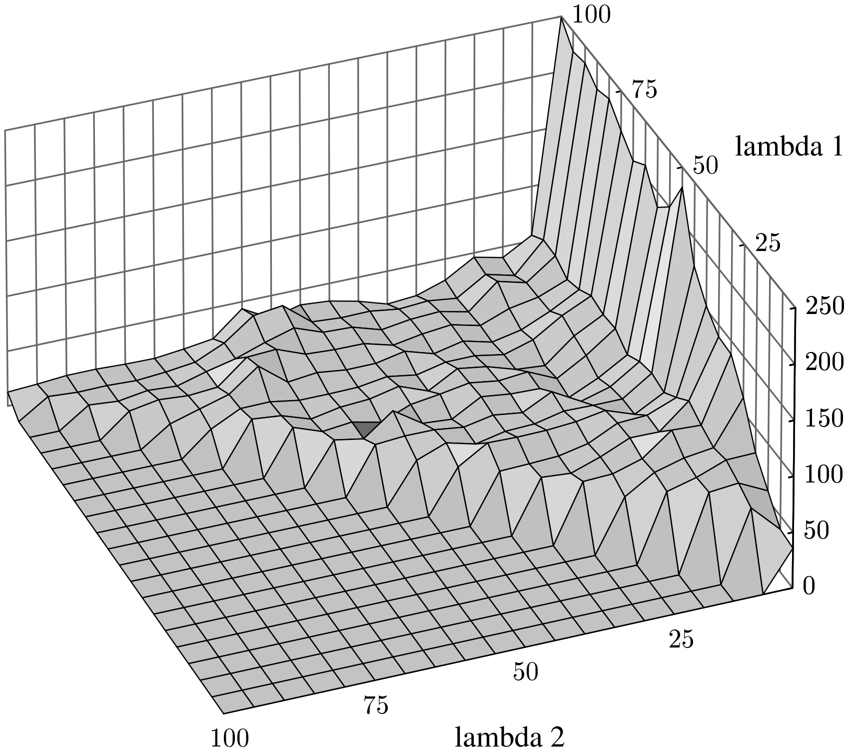


Abbildung 12: Typische Abhängigkeit der Transientenlängen von λ_1 und λ_2

5.2 Zykel- und Transientenlängen

Die Bestimmung der Zykel- und Transientenlängen wurde aus Rechenzeit- und Speichergründen nur bis zu einer Maximallänge der Zykel von 2^{22} Schritten und der Transienten von maximal $2^{2}5$ Schritten durchgeführt. Bei Netzwerkgesetz eins, das wir gerade behandeln, stellt es sich jedoch heraus, daß die Zykel- und Transientenlängen ohnehin kürzer als diese Beschränkungen sind. Wie der Fall einer Überschreitung dieser Maximalgrenzen bei der Bestimmung von mittleren Zykel- und Transientenlängen zu behandeln ist, wird unten bei Netzwerkgesetz zwei erklärt, für das schon bei kleinen Netzwerkgrößen dieses Problem auftritt.

In Abbildung 12 haben wir das typische Bild für die Abhängigkeit der Transientenlängen von den Parametern λ_1 und λ_2 bei fester Knotenzahl n am Beispiel $n = 200$ dargestellt. Die Werte für λ-Kombinationen, die aufgrund von $\lambda_1 \leq \lambda_2$ nicht möglich sind, wurden mit dem Wert 0 ergänzt, um den optischen Eindruck der Perspektive zu verbessern und damit eine realistische Einschätzung der Ergebnisse zu ermöglichen. Auf die Darstellung der Zyklslängen wurde verzichtet, da bis auf eine Kombination von λ_1 und λ_2 *alle* Zykluslängen genau 6 waren. Bei $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = 36$ war die maximale Zykluslänge 12 aufgetreten. Aber auch schon bei den Maximal-, Minimal- und Durchschnittswerte gab es so gut wie keine Abweichung von der Zykluslänge 6, auch nicht bei Veränderung der Netzgröße. Dieses Ergebnis überrascht zumal die Abschätzung des Phasenraumvolumens für den Phasenraum der Netzwerkzustände belegt, daß wesentlich längere Zykel möglich sind. Wir haben keine Erklärung gefunden, warum dieses so restriktive Verhalten eintritt. Es

τ	s_1	s_2	J_{12}
τ_0	0	0	1
τ_0+1	-1	1	0
τ_0+2	-1	1	-1
τ_0+3	0	0	-1
τ_0+4	1	-1	0
τ_0+5	1	-1	1
τ_0+6	0	0	1

τ	s_1	s_2	J_{12}
τ_1	1	0	1
τ_1+1	0	1	1
τ_1+2	-1	2	-1
τ_1+3	0	1	-1
τ_1+4	1	0	-1
τ_1+5	2	-1	1
τ_1+6	1	0	1

Tabelle 4: Explizite Zeitentwicklung eines Netzwerks mit zwei Knoten, je nach Anfangszustand tritt die linke oder die rechte Dynamik nach einiger Zeit auf.

läßt sich allerdings plausibel machen, daß, wenn eine kurze Zykellänge bevorzugt auftritt, die Zykellänge 6 der wahrscheinlichste Kandidat dafür ist.

Das Argument dafür bezieht sich auf die möglichen Zykellängen eines Netzwerks mit nur zwei Knoten. Nehmen wir an, daß nur bei Wertegleichheit der Knoten der Bond abgeschaltet wird, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Wir benennen den Wert an Knoten eins mit $s_1(\tau)$ und den an Knoten zwei mit $s_2(\tau)$. Startet man nun mit einem Anfangszustand $s_2(0) = s_1(0) \mod 2$, so wird sich nach $|s_1(0) - s_2(0)|/2$ bzw. $|s_1(0) - s_2(0)|/2 + 2$ – je nach anfänglicher Ausrichtung des bonds – Schritten ein Zustand $s_1(\tau_0) = s_2(\tau_0)$ einstellen. Sei ohne Einschränkung $s_1(\tau_0) = s_2(\tau_0) = 0$ und $J_{12}(\tau_0) = 1$. Dann entwickelt sich die in Tabelle 4a dargestellte Dynamik.

Ebenso erhält man bei einem Anfangszustand $s_1(0) = s_2(0)+1 \mod 2$ zu einem Zeitpunkt τ_1 einen Zustand $s_1(\tau_1) = s_2(\tau_1) + 1$. Sei wieder ohne Einschränkung $s_1(\tau_1) = 1$, $s_2(\tau_1) = 0$, $J_{12}(\tau_1) = 1$. Dann erhält man die Dynamik, die in Tabelle 4b dargestellt ist.

In beiden Fällen hat man die Zykellänge 6. Dies ist also die typische Schwingungslänge für die Dynamik des elementarsten nichttrivialen Netzwerks. Warum nun diese typische Länge auch bei größeren Netzwerken noch dominiert, ist, wie schon bemerkt, noch nicht geklärt.

Die Transientenlängen verhalten sich etwas anders. Zwar bleibt auch hier die Form der Verteilung für alle untersuchten Netzwerkgrößen $10 \lesssim n \lesssim 1010$ ähnlich, aber die durchschnittliche Transientenlänge steigt mit n. Ebenso steigt auch die maximale Transientenlänge mit wachsendem n. Das Maximum des Ensemblemittels der Transientenlänge bei festem n liegt anscheinend immer bei $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, also bei minimaler Abschaltung. Als Beispiel dafür möge Abbildung 12 dienen. Die Rate des Anwachsens der maximalen und der durchschnittlichen Transientlänge mit n ist aus der relativ kleinen Stichprobe nur schwer abzuschätzen.

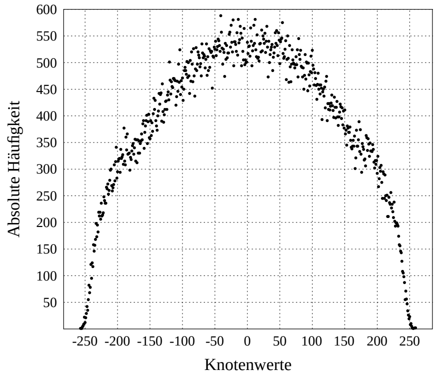
Nun sollte man mal einen Fit mit Funktionen der Form n^x durchführen und eine Abschätzung für den Exponenten x daraus zu entnehmen versuchen.

Will man eine physikalische Theorie auf Netzwerken des Typs eins definieren, so kommt offensichtlich nur der Bereich des transienten Verhaltens in Frage. Allerdings scheint auch dieser relativ kurz zu sein. Dieser Eindruck kann jedoch täuschen. Nehmen wir an, die Zahl der Knoten läge in der Größenordnung der geschätzten Anzahl der Baryonen im Universum, $n \gtrsim 10^{80}$. Dies ist eine eher konservative Schätzung, da Teilchen als kollektive Anregungen von Knoten beschrieben werden sollten und daher mehr Knoten als Teilchen vorhanden sein müssen. Nimmt man dann einen Zusammenhang der Schaltzeit τ mit der physikalischen Zeit t so an, daß $\Delta\tau = 1$ etwa der Planckzeit entspricht, also $t(\Delta_\tau) \sim t_P = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} \approx 1.3 \cdot 10^-43s$, und extrapoliert man das bisherige Anwachsen der Transientenlängen mit der Netzgröße zu Netzgrößen dieser Größenordnung, so erhält man

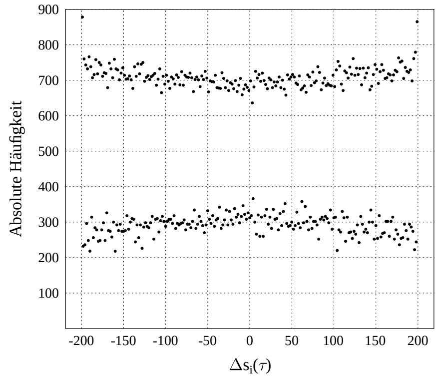
$$t_{\text{trans}} \approx n \cdot t_P \gtrsim 10^{80} \cdot 10^{-43} s \approx 4 \cdot 10^{29} a \ . \tag{11}$$

Das liegt um Größenordnungen über dem geschätzten Alter des Universums. Die Länge der Transienten wäre also durchaus ausreichend, um eine äußerst komplexe und lang andauernde Dynamik zu erklären.

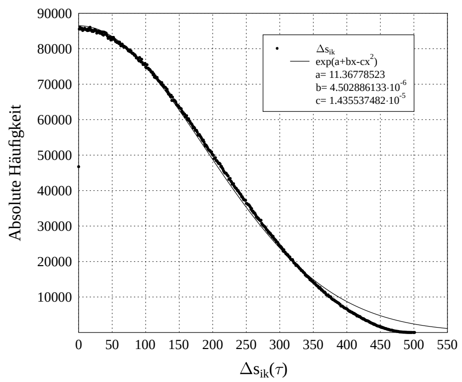
Trotz dieser Argumente bleiben Zykel- und Transientenlängen weit hinter den von den geschätzten Phasenraumvolumen des Netzwerkphasenraums geweckten Erwartungen zurück.



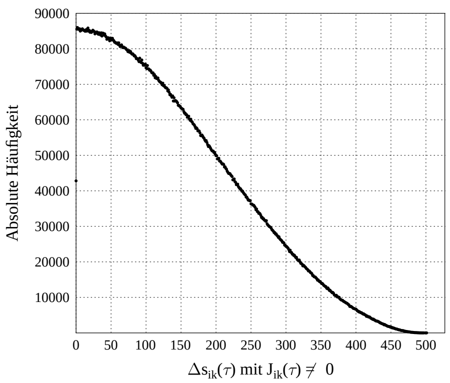
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

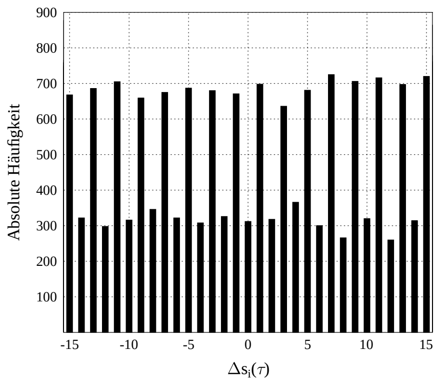
Abbildung 13: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$

5.3 Knotenwerte

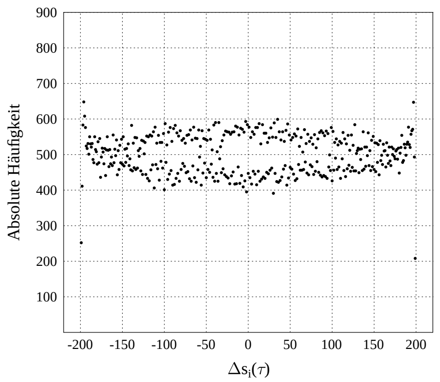
Bei der Untersuchung der typischen Häufigkeitsverteilungen für Knotenwerte und deren zeilichen und räumlichen Fluktuationen wurden die absoluten Häufigkeiten für die einzelnen auftretenden Werte zum festen Zeitpunkt $\tau = 10$ über 1000 verschiedene Anfangsverteilungen aufsummiert (seed 1777-12766, step 11). DEr Zeitpunkt $\tau = 10$ wurde gewählt, um zum einen nicht in den Bereich zyklischen Verhaltens zu gelangen und zum anderen ein vorheriges Abklingen von Anfangseffekten zu erlauben. Wie einige Ergebnisse zeigen ist dies für manche Parametereinstellungen nicht gelungen. Der Beobachtungszeitpunkt lag dort schon im Zykelbereich.

Als Anfangsverteilung wurde Gleichverteilung der Knotenwerte mit $-100 < s_i(0) < 100$ gewählt.

Die beobachteten absoluten Häufigkeiten sind in den Abbildungen 13 bis 26 aufgetragen. Dabei wurden die Beobachtungen für $\lambda_1 = 1 + 25\,k$, $k = 0 \ldots 10$ und $\lambda_2 = 1 + 25l, l = 0 \ldots 10$, $\lambda_2 \geq \lambda_1$ durchgeführt. Die in den Abbildungen dargestellte Auswahl zeigt alle auftretenden „typischen“ Verteilungen.



(a) Detailausschnitt von 13(b), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 26$

Abbildung 14: Detailausschnitt der in Abbildung 13(b) gezeigten Häufigkeitsverteilung und Häufigkeitsverteilung der zeitlichen Schwankungen der Knotenwerte bei $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 26$

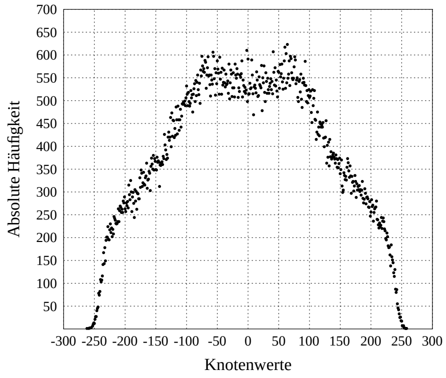
In Abbildung 13 ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Es werden also sehr wenig Bonds abgeschaltet, nämlich nur die, die Knoten mit gleichem Wert verbinden. Die Verteilung der Knotenwerte (Abbildung 13(a)) schöpft im wesentlichen den nach obigen Resultaten möglichen Wertebereich aus. Es ist jedoch keine typische Verteilung, wie etwa Normalverteilung der Werte, zu erkennen. Zumindest ist die Verteilung aber symmetrisch zur 0, was auf alle Knotenwertverteilungen zutrifft (vgl. auch Abbildung 15 bis 26).

Die erste Überraschung liefert Abbildung 13(b) der zeitlichen Fluktuationen $\Delta s_i(\tau)$. Wie man in der Auschnittsvergrößerung 14(a) deutlich sieht, treten ungerade Werte wesentlich häufiger auf als gerade. Dieser zunächst seltsam anmutende Effekt besitzt eine einfache Erklärung. Wie schon erwähnt werden für $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ nur sehr wenige Bonds abgeschaltet. Es treten deshalb häufig Zustände auf, in denen kein Bond abgeschaltet ist. In solchen Zuständen hat jeder Knoten $n-1$ Nachbarn, und da $n = 200$ hier gerade ist, bedeutet dies eine ungerade Anzahl von Nachbarn an jedem Knoten. Bezeichnet nun k die Anzahl der einlaufenden Bonds an einem beliebigen Knoten i zum Zeitpunkt τ, so ist $\Delta s_i(\tau) = k - (n-1-k) = 2k - n + 1$, also ungerade. Also sind alle $\Delta s_i(\tau)$ ungerade, wenn zur Zeit τ kein Bond abgeschaltet ist. Das häufige auftreten solcher *Simplexzustände* erklärt dann also die größere Anzahl ungerader Werte für $\Delta s_i(\tau)$. Folgerichtig wird der Effekt mit zunehmender Abschaltung rasch schwächer, wie Abbildung 14(b) zeigt, und verschwindet für alle anderen beobachteten Parametereinstellungen ganz.

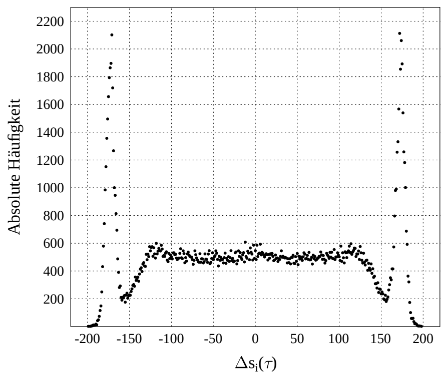
Die zeitlichen Fluktuationen sind von diesem Effekt abgesehen annähernd gleichverteilt und schöpfen den möglichen Wertebereich vollständig aus.

Die räumlichen Fluktuationen scheinen normalverteilt zu sein. Die durchgezogene Kurve zeigt einen Fit mit Funktionen der Form $a\,e^{bx^2}$. Darüber hinaus ist die Verteilung der Fluktuationen $\Delta s_{ik}(\tau)$ zwischen verbundenen Knoten nahezu identisch zu der der $\Delta s_{ik}(\tau)$ zwischen allen Knoten, was sich wiederum durch die sehr geringe Abschaltung von Bonds erklären läßt.

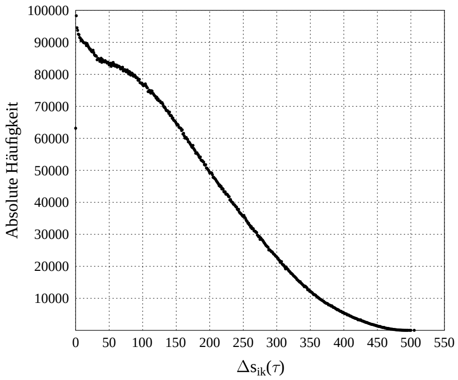
Die in Abbildung 15 gezeigten Ergebnisse für $\lambda_1 = \lambda_2 = 26$ zeigen schon deutliche Veränderungen zu den bisher gesehenen. Die Verteilung der Knotenwerte ist zwar immer noch ebenso breit, aber die Werte sind doch deutlicher im Bereich



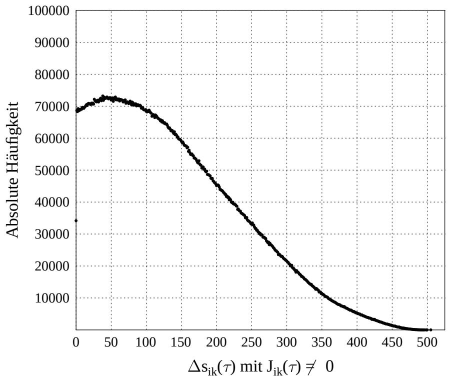
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

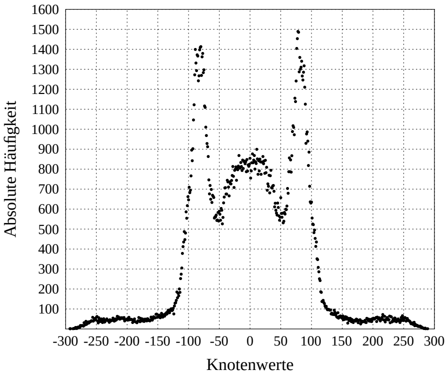
Abbildung 15: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 26$

$|s_i(\tau)| \leq 100$ konzentriert.

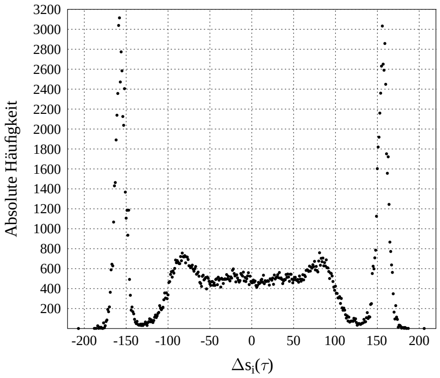
Eine viel größere Veränderung erfährt die Verteilung der $\Delta s_i(\tau)$ (Abbildung 15(b)). Hier dominieren nun deutlich extreme Werte mit Schwerpunkt bei ± 175. Deutet dies schon darauf hin, daß es typische Schwingungen des gesamten Netzes, etwa „von einer Seite“ mit hohen Werten zu einer „anderen Seite“ mit niedrigen Werten und dann wieder zurück gibt? Man kann hier leider nur spekulieren.

Die räumlichen Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten und zwischen allen Knoten unterscheiden sich hier nun auch schon deutlich sichtbar (Abbildung 15(c) und 15(d)). Im Bereich der Fluktuationen kleiner λ_1 sind die Häufigkeiten bei den verbundenen Knoten kleiner. Dies erklärt sich natürlich dadurch, daß eben die Bonds zwischen solchen Knoten abgeschaltet werden bzw. schon abgeschaltet sind.

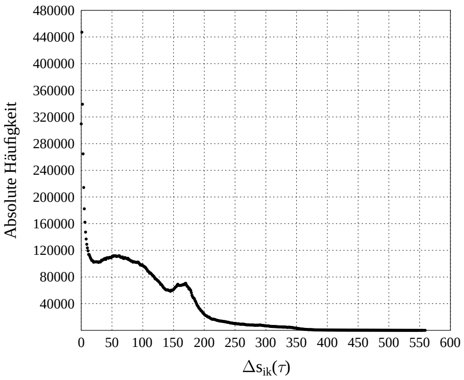
Die in Abbildung 16 gezeigten Häufigkeitsverteilungen für $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 51$ legen die oben schon angedeutete Interpretation nahe. Die Knotenwerte (Abbildung 16(a)) konzentrieren sich in drei Bereichen mit Schwerpunkten bei ± 100 und 0. Dies spiegelt insofern die Struktur des Netzes wider, daß es in drei Teile aufgeteilt werden könnte, die in sich relativ homogene Werte haben. Allerdings wäre dann



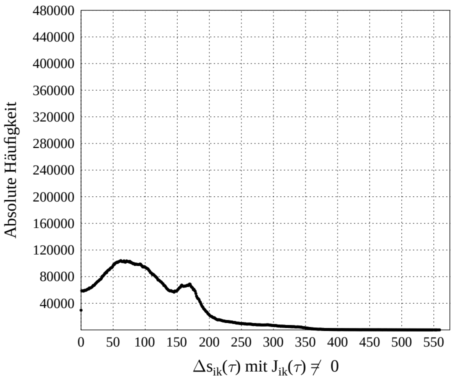
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$

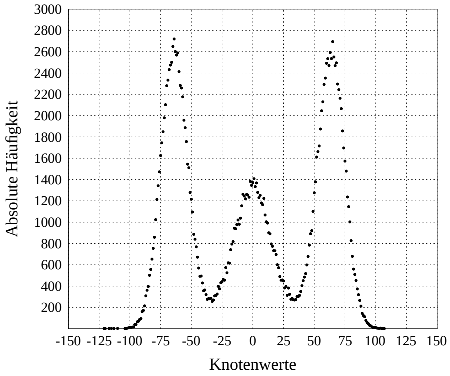


(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

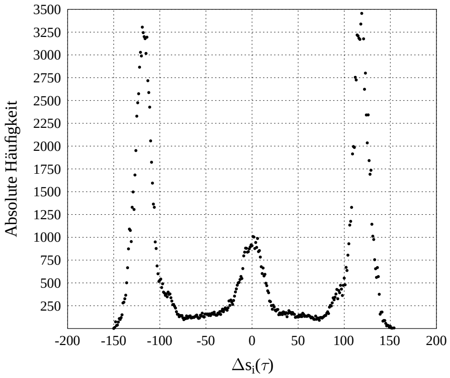
Abbildung 16: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 51$

zu erwarten, daß die so gebildeten Bereiche gegenseitig stärker vernetzt sind als die Bereiche in sich, so daß ein starker Austausch zwischen den Bereichen aber nicht innerhalb derselben stattfände. Dies ist auch mit der starken Konzentration der zeitlichen Schwankungen (Abbildung 16(b)) auf recht große Werte bei ± 150 verträglich. Ein starkes Wertegefälle von Bereich eins zu Bereich zwei bedeutet ja gerade, daß beispielsweise alle Bonds von Bereich zwei zu einem Knoten in Bereich eins dieselbe Richtung haben und so eine starke zeitliche Veränderung an diesem Knoten erzeugen.

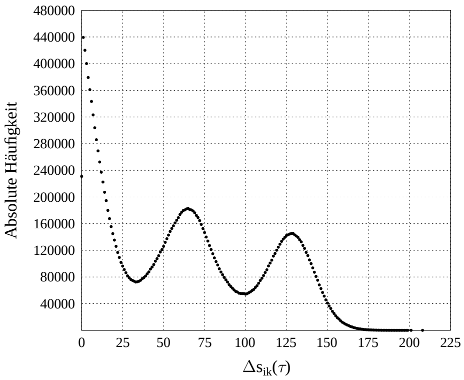
Die wesentliche Veränderung zu der bei $\lambda_1 = \lambda_2 = 26$ beobachteten Situation ist die Verteilung der räumlichen Fluktuationen Δs_{ik} (Abbildung 16(c)). Die Fluktuationen zwischen allen Knoten ist stark bei 0 konzentriert und fällt zu größeren Werten - mit gutem Willen betrachtet - oszillierend ab. Hier könnte man auch wieder den Effekt der homogenen Bereiche mit kleinen Fluktuationen, dem Maximum bei 0 entsprechend, und mit starken Unterschieden zu anderen Bereichen, den zwei weiteren lokalen Maxima in der Häufigkeitsverteilung bei 60 und 170 entsprechend, vermuten.



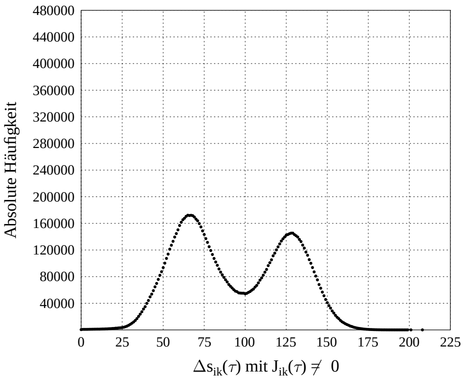
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



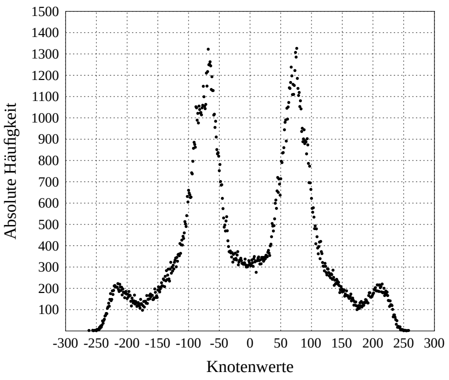
(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 17: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 126$

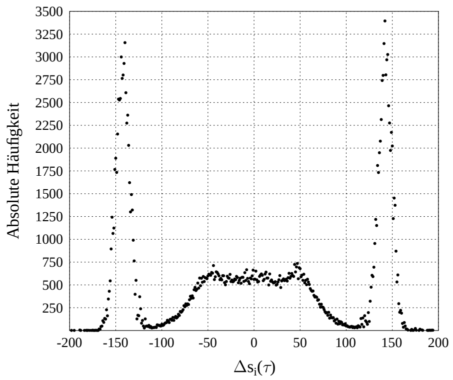
Abbildung 16(d) der Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten zeigt wieder deutlich den Effekt der fehlenden kleinen Fluktuationen im Vergleich zur Häufigkeitsverteilung aller Fluktuationen. Dies setzt sich auch für die weiteren Parametereinstellungen fort (Abbildung 17(d) bis 24(d)) und wird im folgenden nicht jedesmal erwähnt. Bei noch größeren Werten für λ_1 und λ_2 sind praktisch alle Bonds abgeschaltet und somit werde die Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten irrelevant und sind deshalb in Abbildung 25 bis 26 überhaupt nicht mehr dargestellt.

Bei den in Abbildung 17 gezeigten Ergebnissen für $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 126$ setzt sich der beschriebene Trend fort. Es ist jedoch besonders beachtlich, wie deutlich die Oszillationen der Fluktuationen (Abbildung 17(c)) sind. Die kleinen Fluktuationswerte fehlen bei den Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten nun vollständig (Abbildung 17(d)).

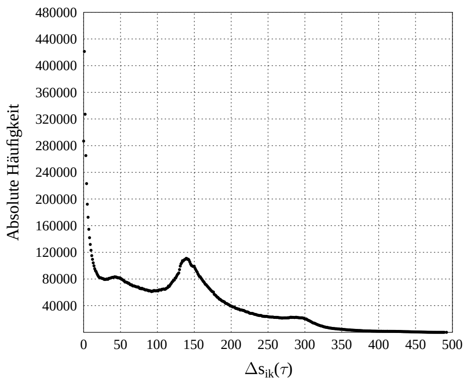
Die Deutlichkeit der Konzentration der Verteilungen auf drei Schwerpunkte, bzw. zwei im Falle der Fluktuationen zwischen verbundenen Knoten, legt nahe, daß mit dem geringeren Wiederanschalten Strukturen der beschriebenen Art deutlicher hervortreten bzw. eher erhalten bleiben.



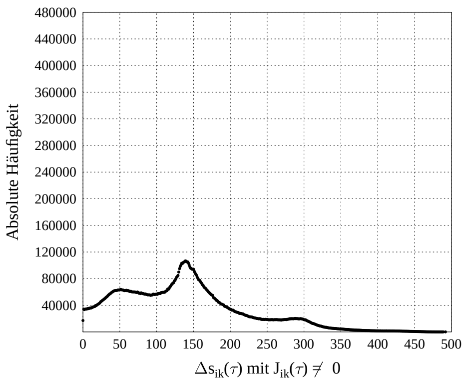
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



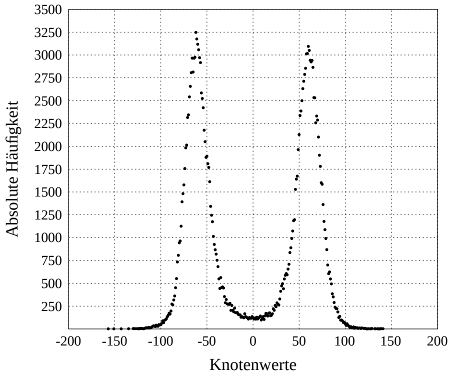
(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 18: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 51$

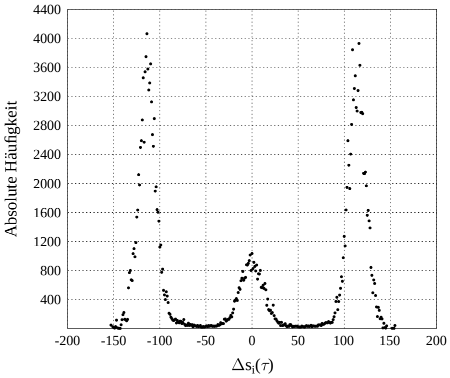
Bei noch stärkerer Abschaltung von Bonds wie in Abbildung 18 für $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 51$ gezeigt, erhält man – der bisherigen Interpretation folgend – eher vier Bereiche verschiedener Werte. Dabei sind die zeitlichen Fluktuationen (Abbildung 18(b)) weniger deutlich aufgetrennt als die Knotenwerte (Abbildung 18(a)), bei denen sehr deutlich vier Schwerpunkte bei ± 210 und ± 80 ausgemacht werden können. Bei den Fluktuationen (Abbildung 18(c)) ist die Aufteilung in vier Maxima zwar zu erkennen, aber recht undeutlich. Die drei Maxima in Abbildung 18(d) hingegen sind wieder sehr deutlich.

Reduziert man jetzt wieder das Wiederanschalten wie in Abbildung 19, in der Ergebnisse zu $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 101$ dargestellt sind, so sieht man nur noch eine Zweiteilung der Verteilungen, außer bei den zeitlichen Fluktuationen (Abbildung 19(b)). Diese ist aber sehr deutlich zu erkennen.

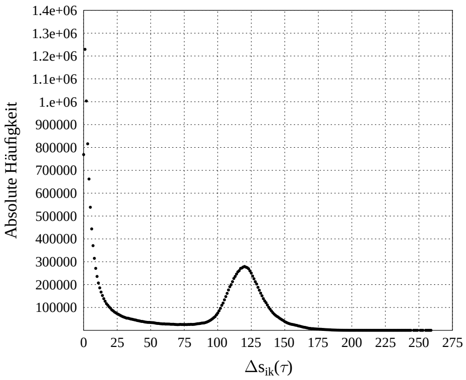
Bei noch geringerem Wiederanschalten, wie in Abbildung 20 gezeigt, werden die Strukturen noch deutlicher. Der wesentliche Unterschied, der sofort ins Auge fällt, ist die extrem starke Konzentration von $\Delta s_i(\tau)$ auf den Wert 0. Dies zeigt deutlich, daß bei diesen Parametereinstellungen schon viele Knoten isoliert sind und



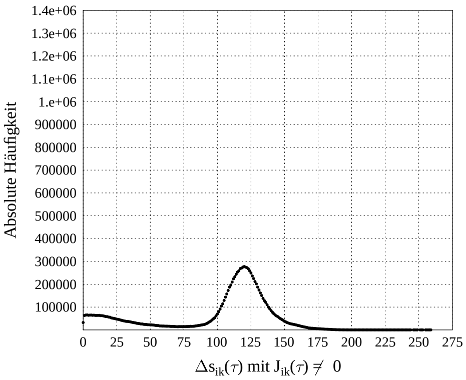
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 19: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 101$

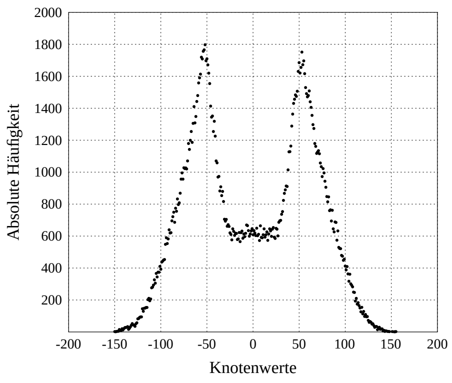
demzufolge keine Änderung ihres Wertes mehr erfahren. Dieselbe Bemerkung gilt auch für alle weiteren Beobachtungen, Abbildung 21(b) bis 24(b) sowie Abbildungen 25 bis 26, in denen auf die Darstellung der zeitlichen Fluktuationen ganz verzichtet wurde, da sie praktisch alle Null waren.

Die zu $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 251$ gemachteten Beobachtungen (Abbildung 21) passen nicht ganz in das bisher verwendete Erklärungschema. Hier scheint das Netzwerk in einem recht strukturlosen Zustand „eingefroren“ zu sein.

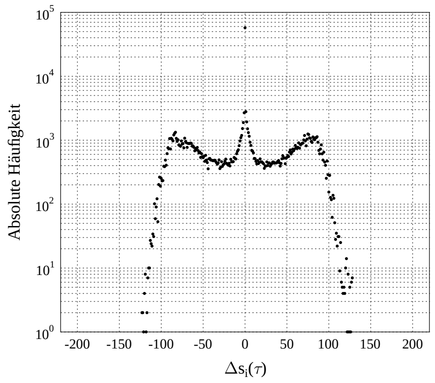
Bei erhöhter Abschaltung, $\lambda_1 = 76$ und $\lambda_2 = 101$, Abbildung 22, findet man aber wieder die deutliche Doppelschwerpunktstruktur. Die Konzentration der Knotenwerte (Abbidung 22(a)) und der zeitlichen Fluktuationen (Abbildung 22(b)) auf Werte um ± 100, sowie der räumlichen Fluktuationen auf Werte um 0 und 200 sind deutlicher als je zuvor.

Bei Verringerung des Wiederanschaltens, Abbildung 23 für $\lambda_1 = 76$ und $\lambda_2 = 251$, verschwindet aber auch hier der Effekt wie schon zuvor gesehen. Es ist keine Struktur aus den Häufigkeitsverteilungen offensichtlich.

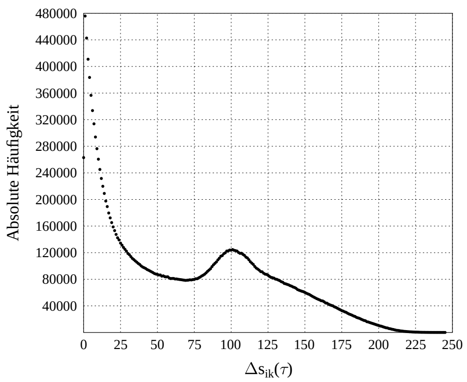
Die restlichen Abbildungen 24 bis 26 dienen zur Vervollständigung des Bildes.



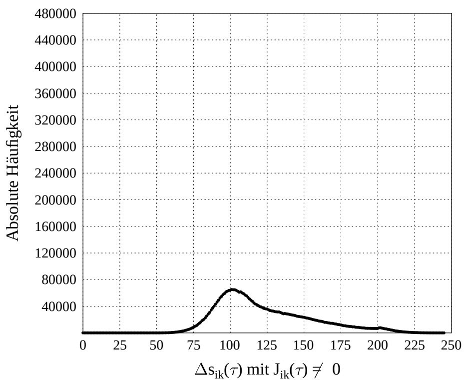
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$



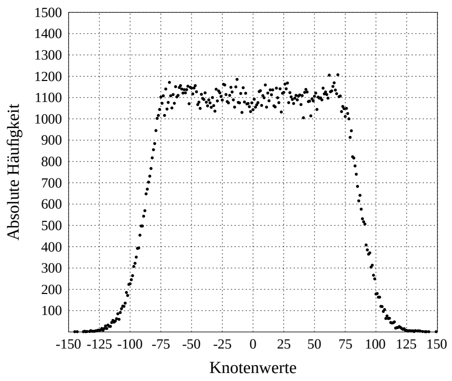
(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 20: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 201$

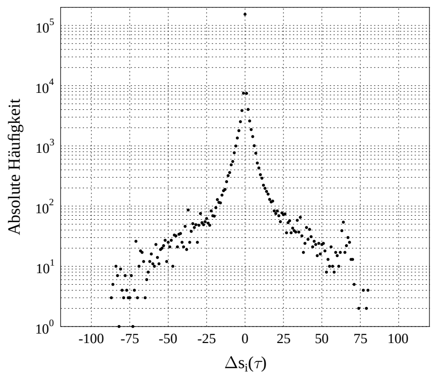
Auffallend ist vielleicht noch die Tatsache, daß in Abbildun 25(d) für $\lambda_1 = 126$ und $\lambda_2 = 151$ sowie in Abbildung 26(f) die räumlichen Fluktuationen fast normalverteilt aussehen, obwohl das Netz schon eingefroren ist. Vielleicht handelt es sich hier aber auch um einen Effekt, der aus der gewählten Anfangsverteilung zu erklären ist, die aufgrund des sehr schnellen Abschaltens der Bonds erhalten wird.

Leider sind die durchschnittlichen Transientenlängen so gering – wie wir gesehen haben, sind wir bei den Knotenwertverteilungen schon öfter in den Zyklusbereich geraten –, daß ein ausreichendes Zeitmittel zum Vergleich zum Ensemblemittel nicht gebildet werden kann. Diese Untersuchung verschieben wir auf Netzwerkgesetz zwei. Dort wird sich dann auch zeigen, ob die betrachteten Systeme eine Gleichheit von Ensemble- und Zeitmittel zeigen und inwiefern in diesem Sinne Ergodizität gegeben ist.

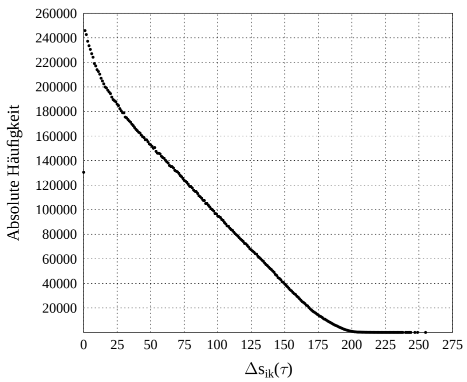
Nun stellt sich noch die Frage nach dem Verhalten des Netzes an einzelnen Knoten. Pendelt sich der Knoten auf einen bestimmten Wert ein oder besitzt er einen bestimmten Wertebereich? kommen die in der Gesamtverteilung aller Knotenwerte gesehenen Häufigkeiten an einzelnen Knoten repräsentativ vor?



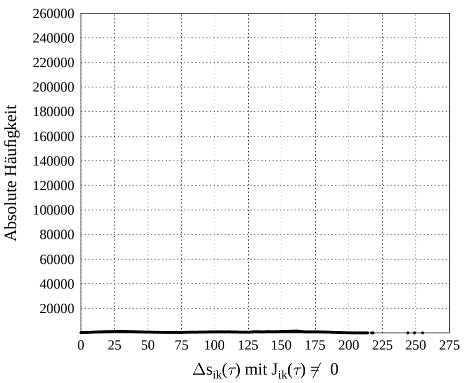
(a) Häufigkeitsverteilung $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung $\Delta s_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung $\Delta s_{ik}(\tau)$



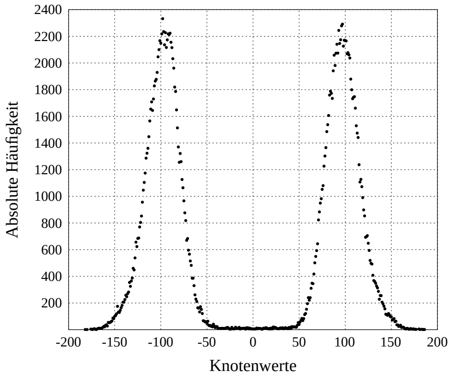
(d) Häufigkeitsverteilung $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 21: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 251$

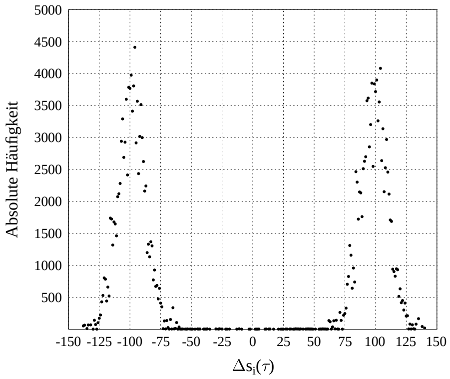
Im Ensemblemittel ist die Antwort offensichtlich. Aufgrund der Symmetrie aller Knoten im Netzwerkgesetz muß die Verteilung an den einzelnen Knoten im Ensemblemittel identisch sein. Das bedeutet aber, da die Gesamtverteilung aus diesen identischen Verteilungen zusammengesetzt ist, daß die einzelnen Verteilungen an den Knoten die Gesamtverteilung widerspiegeln müssen.

Für das Zeitmittel können wir wiederum aufgrund der kurzen Transientenlängen keine befriedigende Antwort geben. Auch diese Betrachtung wird deshalb auf die Behandlung von Netzwergesetz zwei verschoben.

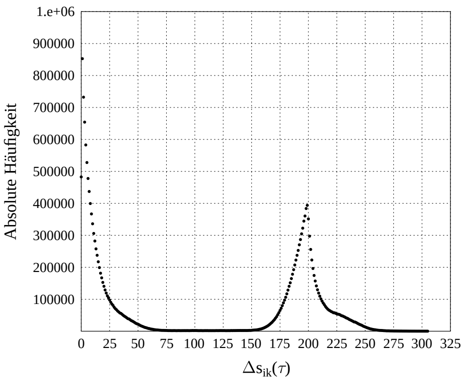
Das Zeitmittel im Zykelbereich hingegen kann für die einzelnen Knoten prinzipiell nicht eine für das ganze Netzwerk repräsentative Werteverteilung erzeugen, wenn die Gesamtverteilung mehr als 6 Werte hat, da bei der vorherrschenden Zykluslänge von sechs Schritten nur maximal sechs verschiedene Werte an einem festen Knoten angenommen werden können.



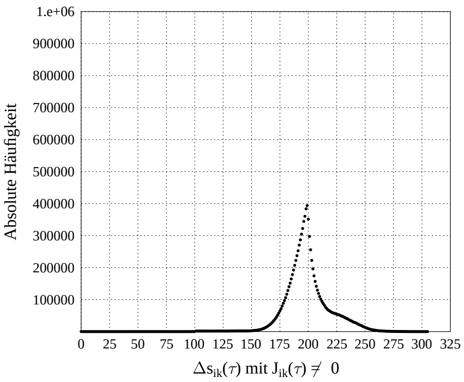
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$

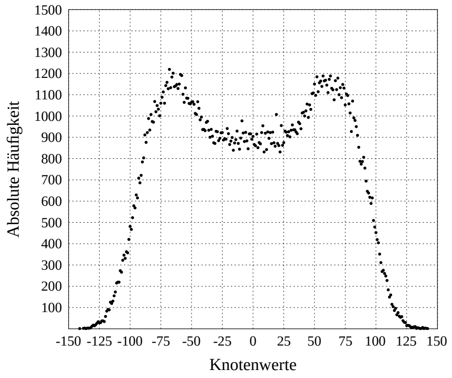


(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$

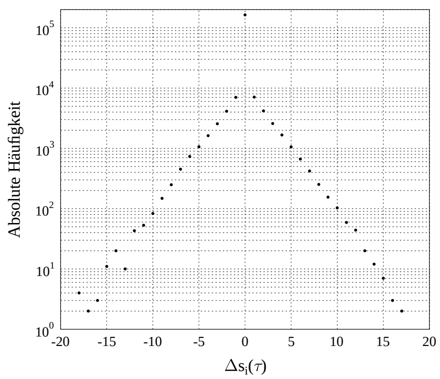


(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

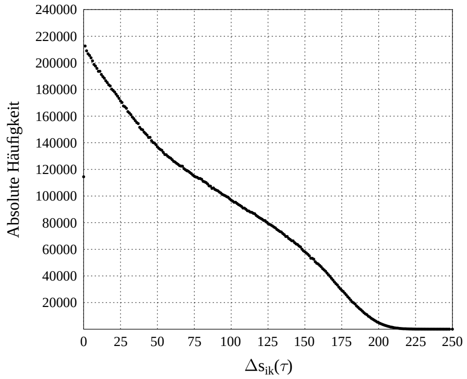
Abbildung 22: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 76$ und $\lambda_2 = 101$



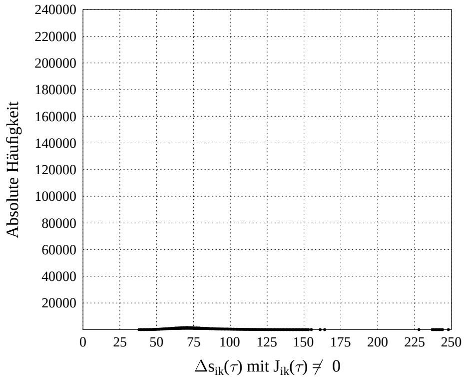
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$

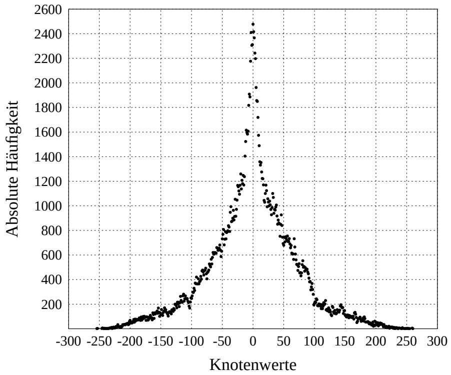


(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$

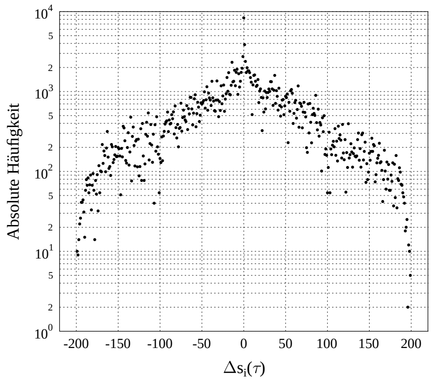


(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

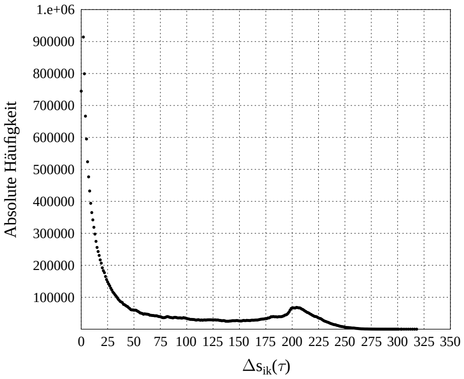
Abbildung 23: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 76$ und $\lambda_2 = 251$



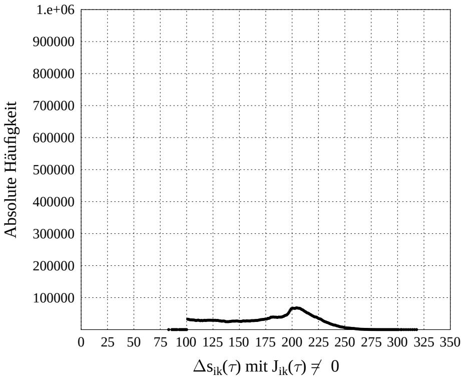
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_i(\tau)$

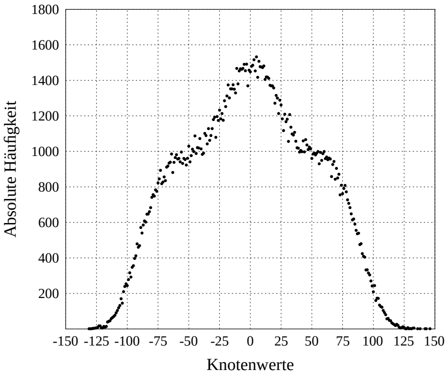


(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$

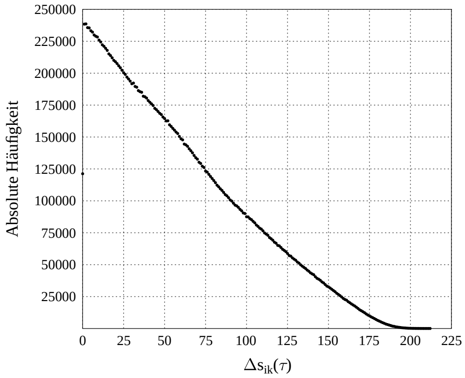


(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

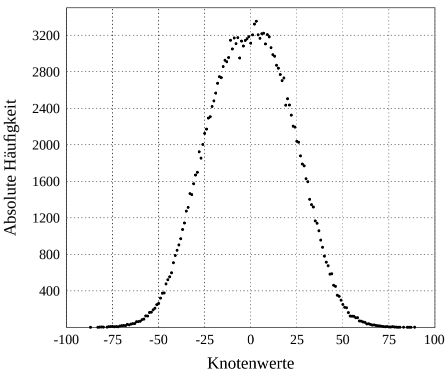
Abbildung 24: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 101$ und $\lambda_2 = 101$



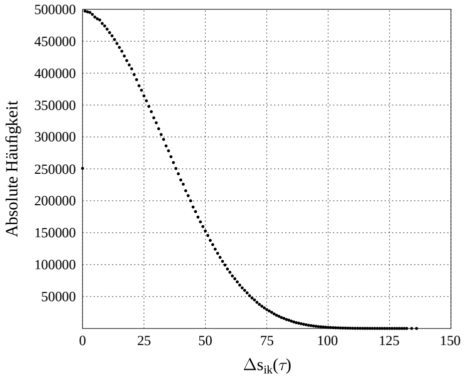
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 101$, $\lambda_2 = 226$



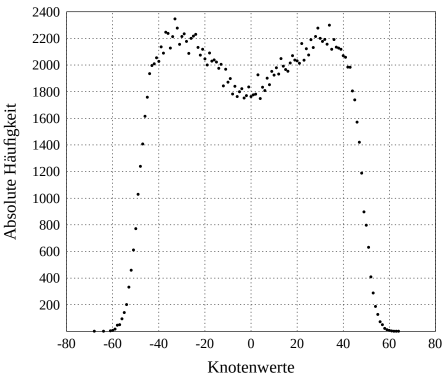
(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 101$, $\lambda_2 = 226$



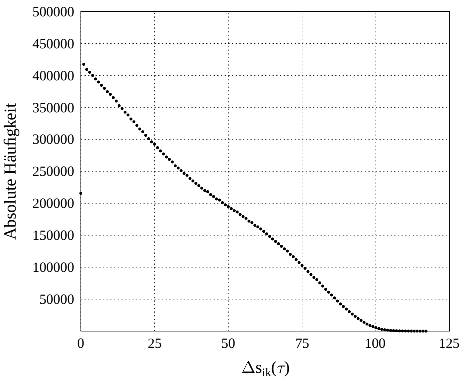
(c) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 126$, $\lambda_2 = 251$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 126$, $\lambda_2 = 251$

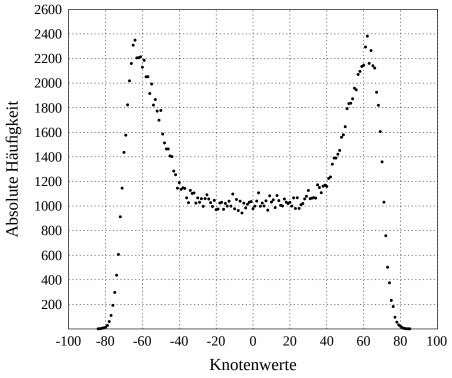


(e) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 151$, $\lambda_2 = 151$

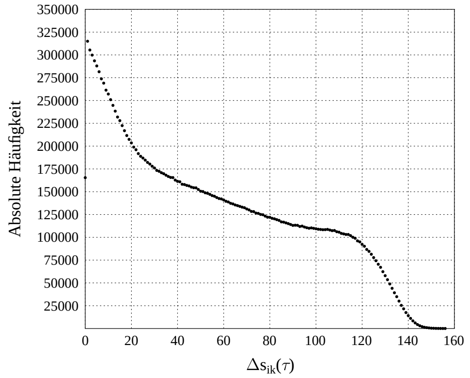


(f) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 151$, $\lambda_2 = 151$

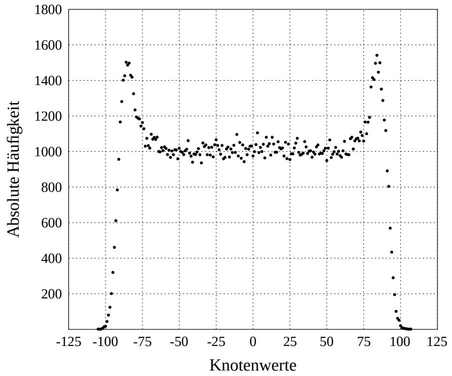
Abbildung 25: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer räumlichen Schwankungen mit $\lambda_1 \in \{101, 126\}$ und $\lambda_2 \in \{151, 226\}$



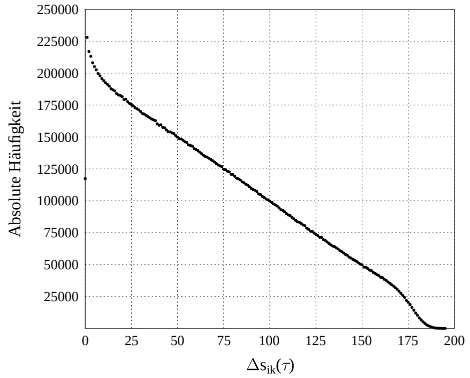
(a) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 176$, $\lambda_2 = 176$



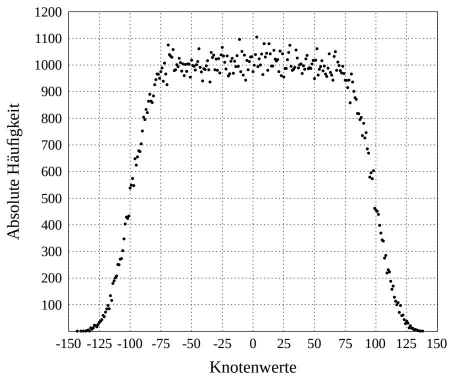
(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 176$, $\lambda_2 = 176$



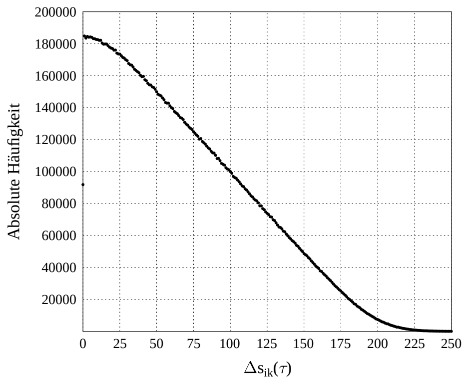
(c) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 201$, $\lambda_2 = 201$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 201$, $\lambda_2 = 201$

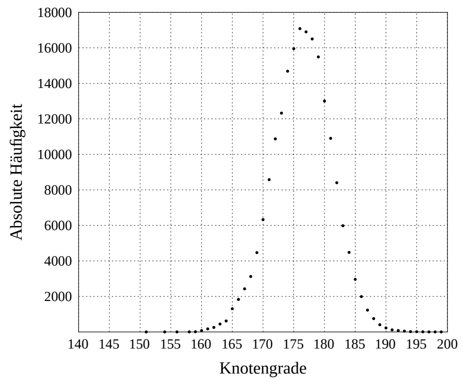


(e) Häufigkeitsverteilung von $s_i(\tau)$, $\lambda_1 = 226$, $\lambda_2 = 251$

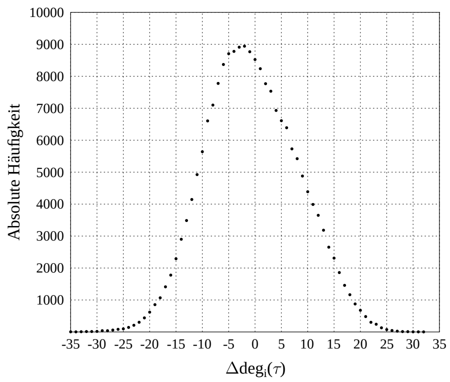


(f) Häufigkeitsverteilung von $\Delta s_{ik}(\tau)$, $\lambda_1 = 226$, $\lambda_2 = 251$

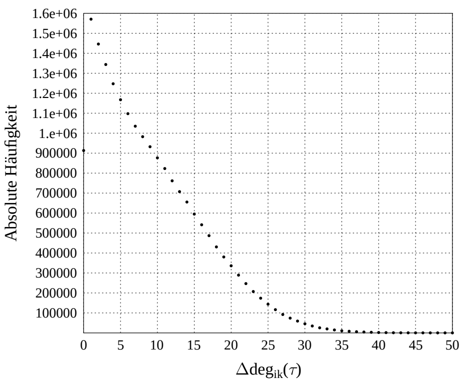
Abbildung 26: Häufigkeitsverteilungen der Knotenwerte und ihrer räumlichen Schwankungen mit $\lambda_1 \in \{176, 201\}$ und $\lambda_2 \in \{176, 201, 251\}$



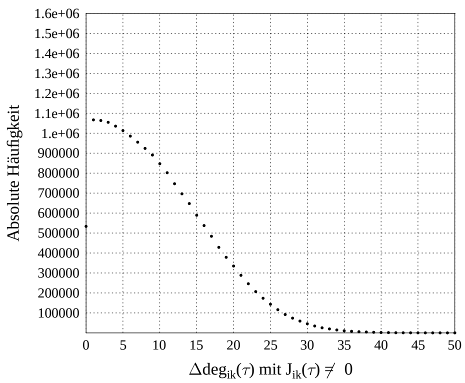
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

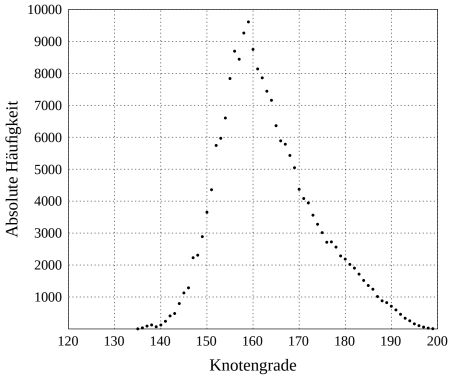
Abbildung 27: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 26$

5.4 Knotengrade

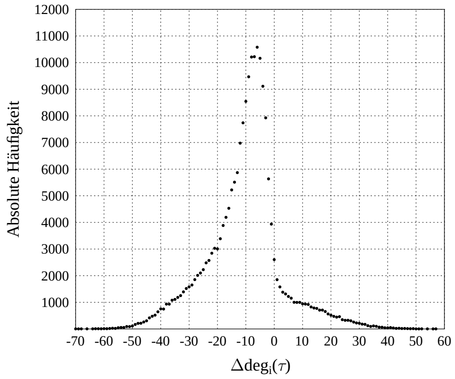
Die Interpretation der Knotengradverteilungen gestaltet sich etwas schwieriger als bei den Knotenwerten, da hier nicht die Summe aller Knotengrade irgendeine Bedingung erfüllen muß. Demnach sind also Zustände mit durchweg extremen Knotengraden, etwa all Knotengrade Null oder alle Knotengrade maximal erlaubt und vermutlich sogar recht häufig.

Die Ergebnisse der Simulationen für die Knotegradverteilungen sind in Abbildung 27 bis 32 dargestellt. Bei sehr kleinen Abschaltraten ist das Ergebnis wie erwartet so, daß fast alle Knoten maximalen Grad haben und swohl die räumlichen als auch die zeitlichen Schwankungen sehr gering sind. Die Häufigkeitsverteilungen bieten keine weiteren Erkenntnisse und sind nict dargestellt.

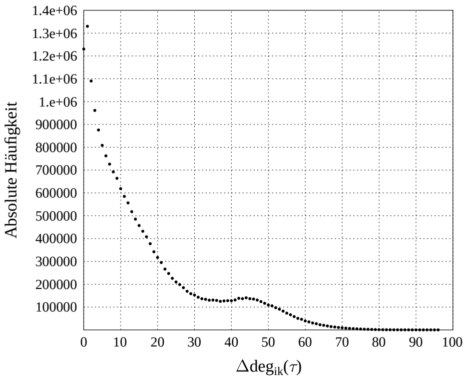
Bei etwas stärkerer Abschaltung (Abbildung 27 für $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 26$) erhält man für die Knotenwertverteilung eine annähernde Gaußverteilung. Die durchgezogene Linie in Abbildung 27(a) ist ein Fit mit Funktionen der Form $f(x) = exp(a + b(x-k) + c(x-k)^2$. Die Übereinstimmung ist recht passabel.



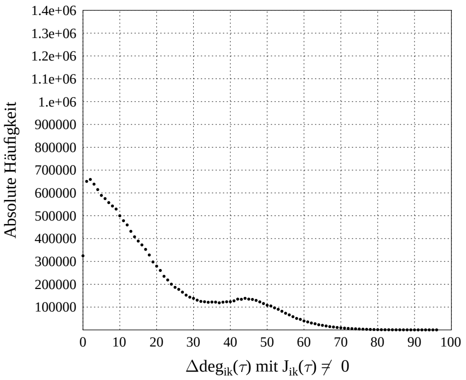
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

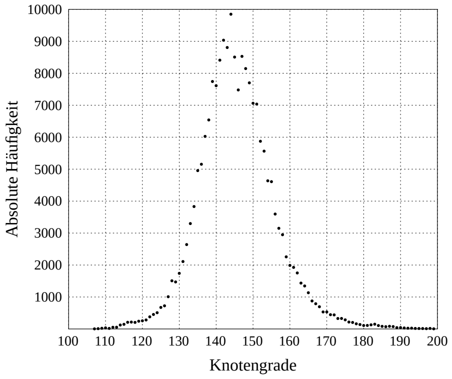
Abbildung 28: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 51$

Auch die zeitlichen Schwankungen haben eine ähnliche Verteilung. Abbildung 27(b) zeigt die Verteilung und wieder einen Fit. Allerdings läßt sich beim genauen Hinsehen schon eine Asymmetrie der verteilung erkennen. Die Abschaltung von Bonds ist gegenüber dem Anschalten etwas bevorzugt. Auch der Schwerpunkt der Verteilung liegt im negativen Bereich.

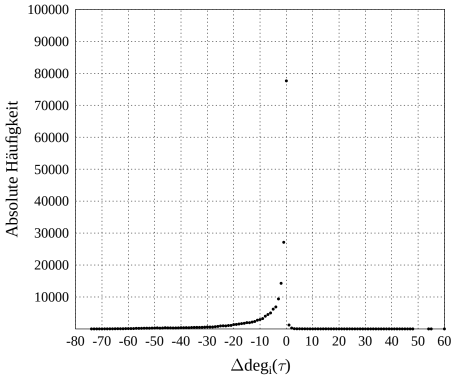
Bei den räumlichen Fluktuationen fällt ins Auge, daß die Fluktuationen zwische allen Knoten deutlich mehr kleine Werte habe als die zwischen verbundenen Knoten. Dies weist darauf hin, daß Knoten mit ähnlichen Knotengraden seltener verbunden sind als solche, die eher verschiedene Grade besitzen. Es zeigt, daß dies für alle Einstellungen von λ_1 und λ_2 gültig ist (siehe Abbildung 28 bis 31).

Bei verminderter Wiederanschaltung von Bonds (Abbildung 28) werden die Asymmetrien der Verteilungen deutlicher. Jetzt sind sowohl die Knotengradverteilung asymmetrisch mit Bevorzugung kleinerer Werte als auch die zeitlichen Knotenwertfluktuationen deutlich im negativen Bereich konzentriert, wenn auch immer noch moderat in ihrem Betrag.

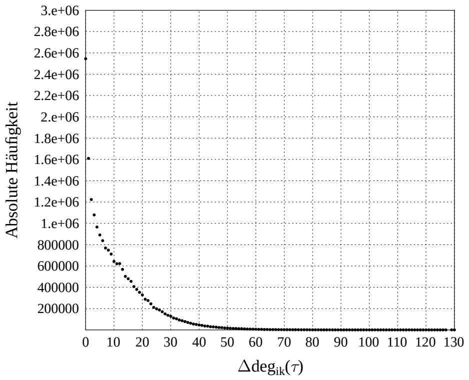
Bei den räumlichen Fluktuationen hingegen bildet sich eine Struktur mit zwei



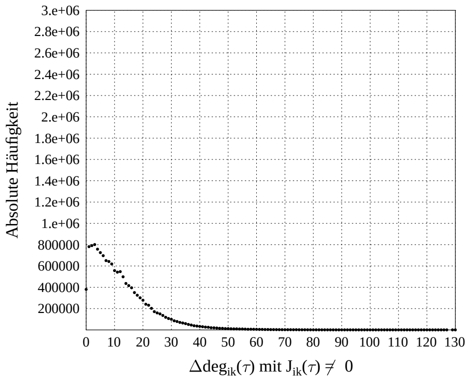
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

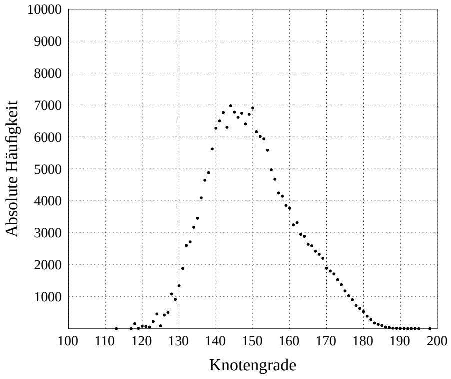
Abbildung 29: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 26$ und $\lambda_2 = 76$

lokalen Maxima heraus. Dies könnte zwei verschiedene Ursachen haben.

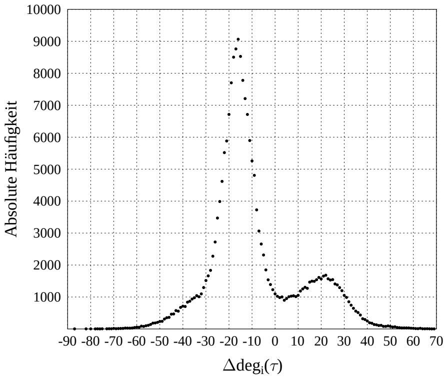
Zum einen wäre die zuvor bei den Knotenwerten vorgetellte Interpretation möglich. Danach ließen sich die Knoten des Netzwerks zu gegebener Zeit typischerweise in zwei Gruppen teilen, die untereinander relativ homogenen Knotengrad besitzen, die Bereiche untereinander sich aber durch einen typischen Wert unterscheiden.

Zum anderen wäre aber im Gegensatz zu den Knotenwertverteilungen auch die Interpretation möglich, daß es zwei verschiedene typische Zustände des Netzwerkes gibt. Im einen Zustand sind die Knotengrade recht homogen und dadurch erklärt sich das Maximum der räumlichen Knotengradfluktuationen bei sehr kleinen Werten. Im anderen Zustand sind die Knotengrade an allen Knoten recht unterschiedlich, typischerweise mit einer Differenz die dem zweiten lokalen Maximum der Fluktuationsverteilung entspricht.

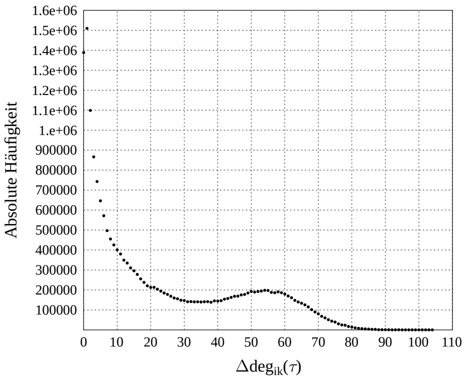
Keine der beiden Erklärungen läßt sich anhand der vorliegenden Daten erhärten. Ein einfacher Test zu diesem Zweck wäre die Bildung eines zeitlichen Mittels. Zeigte dies nur eines der typischen Maxima, wäre dies ein Hinweis auf die zweite Theorie. Allerdings wäre umgekehrt eine identische Häufigkeitsverteilung im Zeitmittel ohne



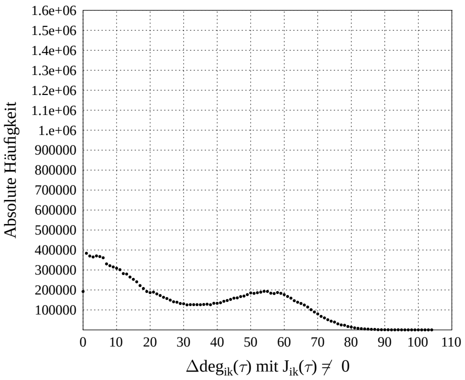
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

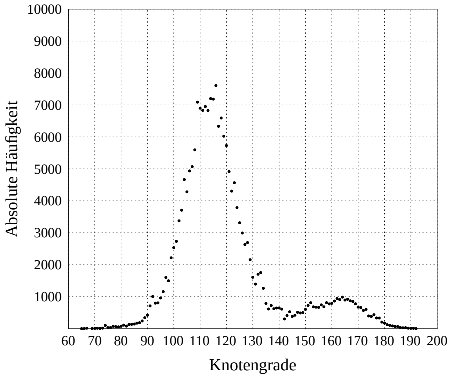
Abbildung 30: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 51$

Aussage hinsichtlich der Interpretation. Da das Bilden von Zeitmitteln in diesem Modell wie schon erwähnt wenig Sinn macht, verschieben wir auch diese Frage auf die Untersuchung von Netzwerkgesetz zwei.

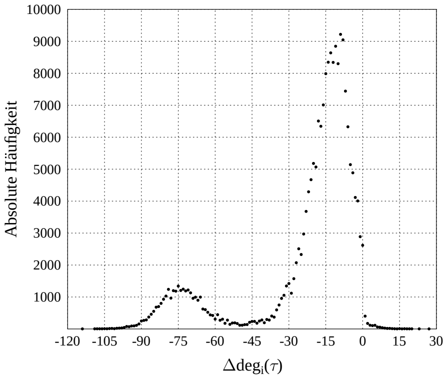
Reduziert man das Wiederanschalten noch weiter wie in Abbildung 27 dargestellt, erhält man wieder etwas andere Ergebnisse.

Die Knotengradverteilung)Abbildung 29(a)) sieht wieder annähernd symmetrisch aus. Dafür sind die zeitlichen Fluktuationen (Abbildung 29(b)) fast ausschließlich negativ, wie bei sehr geringem Wiederanschalten zu erwarten ist. Allerdings konzentrieren sich die zeitlichen Fluktuationen sehr stark auf Null, d.h. es werden nur wenige Bonds noch abgeschaltet. Dies ist ein Hinweis darauf, daß man sich zum Beobachtungszeitpunkt schon in einem bezüglich der Bonddynamik fast statischen Zustand befindet.

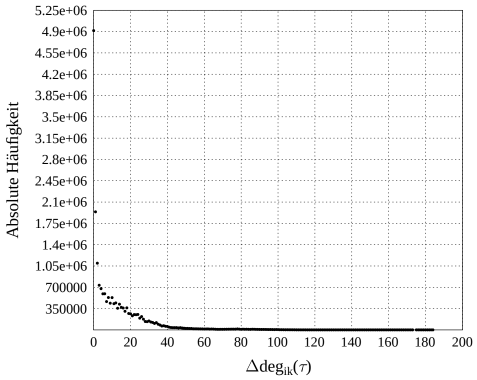
Bei den räumlichen Fluktuationen der Knotengrade (Abbildung 29(c) und 29(d)) gibt es nur noch ein Maximum der Verteilung nahe Null. Bei diesen Parametereinstellungen ist zudem sehr deutlich zu erkennen, daß gleiche Knotengrade bei verbundenen Knoten im Vergleich zu der Situation zwischen allen Knoten sehr viel



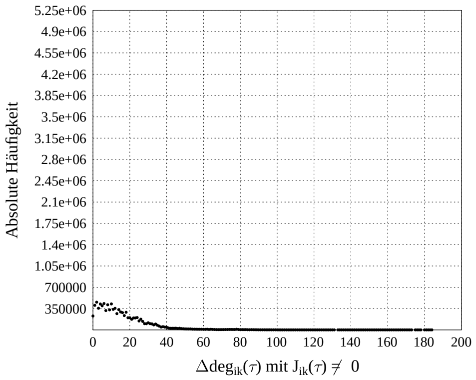
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$



(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$



(c) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

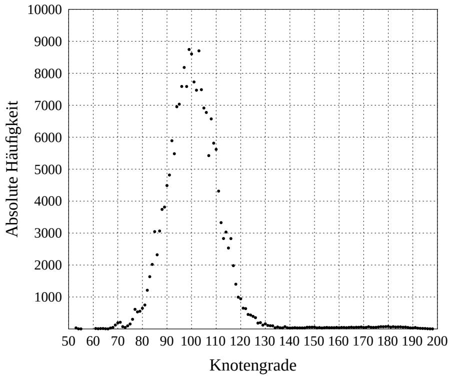
Abbildung 31: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und ihrer zeitlichen und räumlichen Schwankungen bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 101$

seltener auftreten.

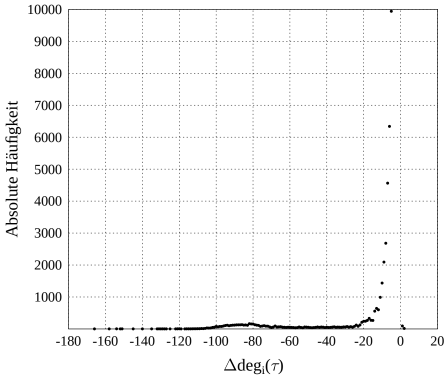
Wenden wir uns der Situation bei $\lambda_1 = 51$ und $\lambda_2 = 51$ zu (Abbildung 30). Die Kontengradverteilung ist etwas asymmetrisch und ungefähr bei 150 zentriert. Sie erscheint deutlich nicht mwehr Normalverteilung zu entsprechen.

Bei den zeitlichen Schwankungen bilden sich zwei lokale Maxima, eins im negativen Bereich bei -18 und ein kleineres im positiven Bereich bei 20 heraus. Dies legt die Interpretation nahe, daß an den Knoten entweder relativ viele Bonds abgeschaltet oder umgekehrt relativ viele Bonds angeschaltet werden. Dies ließe sich dadurch erklären, daß der entsprechende Knoten einen Wert nahe am Mittelwert und somit einen den anderen Knotenwerten ähnlichen Wert besitzt. Dann würden relativ viele Bonds abgeschaltet. Oder der Wert am Knoten ist deutlich größer oder Kleiner als der vieler anderer Knoten und viele Bonds werden angeschaltet. Ob diese anschauliche Interpretation richtig ist, läßt sich leider anhand diese Beobachtungen nicht entscheiden. Man aknn aber festhalten, daß große Veränderungen des Knotengrades typischer sind als kleine, allmähliche.

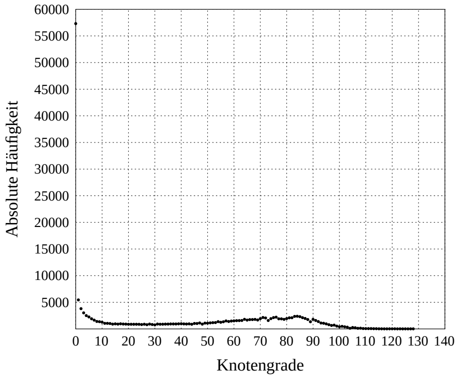
Die räumlichen Fluktuationen zeigen wieder die oben diskutierte Struktur mit



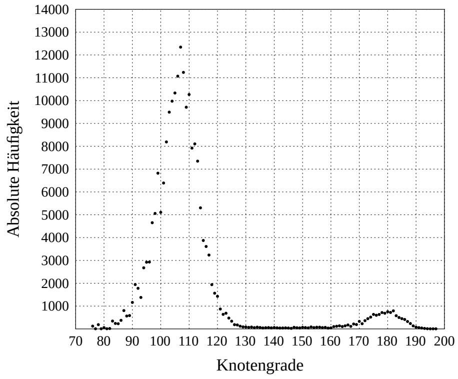
(a) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 51$, $\lambda_2 = 126$



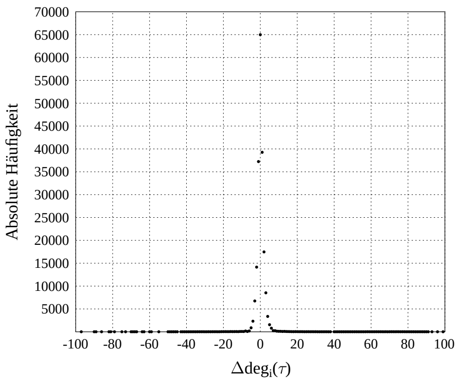
(b) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 51$, $\lambda_2 = 126$



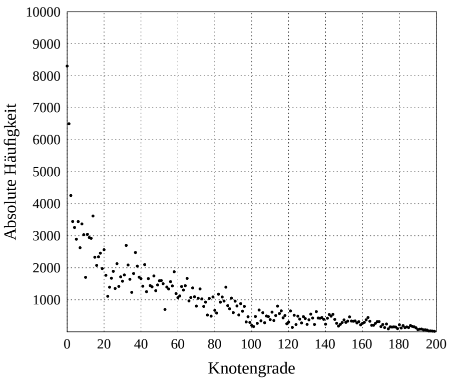
(c) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 51$, $\lambda_2 = 201$



(d) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 76$, $\lambda_2 = 76$



(e) Häufigkeitsverteilung von $\Delta\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 76$, $\lambda_2 = 76$



(f) Häufigkeitsverteilung von $\deg_i(\tau)$, $\lambda_1 = 101$, $\lambda_2 = 101$

Abbildung 32: Häufigkeitsverteilungen der Knotengrade und zeitlicher Schwankungen mit $\lambda_1 \in \{51, 76, 101\}$ und $\lambda_2 \in \{76, 101, 126, 201\}$

zwei lokalen Maxima. Das Fehlen kleiner räumlicher Knotengradfluktuationen zwischen verbunden Knoten ist sehr deutlich zu erkennen.

Vermindert man jetzt wieder die Wiederanschaltung bei gleicher Abschaltung (siehe Abbildung 31), wird die Knotengradverteilung nicht nur etwas asymmetrisch sondern hat sogar zwei lokale Maxima.

Auch die zeitlichen Fluktuationen, die fast ausschließlich negativ sind, besitzen zwei lokale Maxima eins bei moderater Gradverminderung, etwas bei $\Delta \mathrm{deg}_{ik} = -18$ und ein kleineres bei recht extremer Gradverminderung bei $\Delta \mathrm{deg}_{ik} = -78$.

Die räumlichen Fluktuationen der Knotengrade konzentrieren sich nun sehr deutlich auf Null, die Knotengrade sind also relativ homogen verteilt.

In Abbildung 32 sind nur noch die Knotengradverteilung und die zeitlichen Fluktuationen gezeigt, da die räumlichen Fluktuationen keine großen Aufschlüsse mehr bieten.

Im wesentlichen sind die gezeigten Diagramme zum Abrunden des Gesamteindrucks gedacht.

Eine ausführlichere Auswahl (allerdings direkt in der aus der Simulation erhaltenen Form) liegt als Anlage A bei.

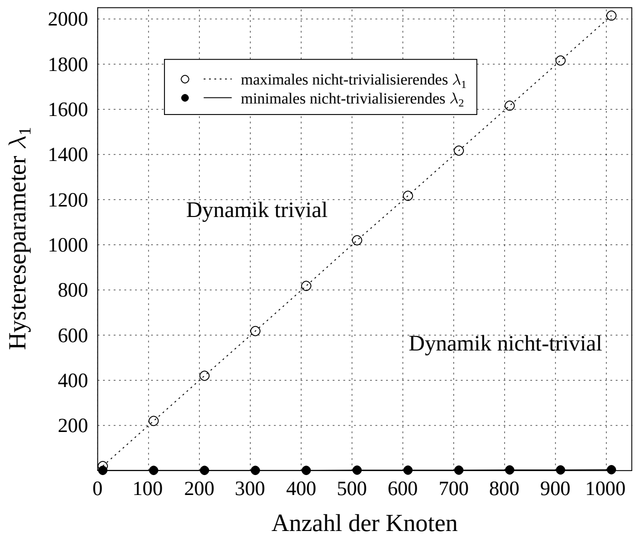


Abbildung 33: maximale Werte für λ_2, die nicht-triviale Dynamik des Netzwerks zeigen.

Parameter	Wertebereich
Netzgröße n	$n = 10 + 100k,\ k = 0, \ldots, 10$
Anfangswertparameter p	$p = 0$
Hystereseparameter λ_1	$\lambda_1 = \frac{1}{50} k \cdot n,\ k = 1, \ldots, 50$
Hystereseparameter λ_2	$\lambda_2 = \frac{1}{50} k \cdot n,\ k = 1, \ldots, 50$
seed s	$s = 1777 + 11k,\ k = 0, \ldots, 19$
Beobachtungszeit τ	$\tau = 20, \ldots, 30$

Tabelle 5: Wertebereiche der Parameter, über die gemittelt wurde, um typische Größenordnungen festzustellen. Aufgrund eines Fehlers ist das nur der halbe Bereich der Parameterkonfiguratuionen, die nicht-triviale Dynamik erlauben, vgl. Abbildung 33 ausgeschöpft worden.

6 Modell zwei

6.1 Allgemeine Größenordnungen

Zunächst müssen wieder die Parameterbereiche festgestellt werden, die nicht-triviale Netzwerkdynamik erlauben. Diesmal ist λ_2 der entscheidende Parameter und es wurde wieder bei der Untersuchung der günstigste Fall im Hinblick auf λ_1, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2$ gewählt. Abbildung 33 zeigt das Resultat.

Dementsprechend sollten die Parameter λ_1 und $lambada_2$ im Bereich $1 \leq \lambda_{1,2} \leq 2n$ gewählt werden.

Aufgrund eines Fehlers ist im folgenden $1 \leq \lambda_{1,2} \leq n$ gewählt worden. Tabelle 5 zeigt die Details.

6.1.1 Bemerkungen zu den Knotenwerten

In Übereinstimmung mit den Beobachtungen bei Netzwergesetz 1 wachsen alle betrachteten Größen in guter Näherung linear mit der Netzgröße. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 34 bis 37 dargestellt.

Untersuchte Größe	Min.	Max.	Mittel
Werteanzahl $s_i(\tau)$	$0.21\,n$	$0.79\,n$	$0.64\,n$
Minimum $s_i(\tau)$	$-1.77\,n$	-0.12	$-1.00\,n$
Maximum $s_i(\tau)$	$0.11\,n$	$1.72\,n$	$1.00\,n$
Durchschnitt $s_i(\tau)$	0	0	0
$\sigma(s_i(\tau))$	$0.05\,n$	$1.03\,n$	$0.58\,n$
Werteanzahl $\Delta s_i(\tau)$	0.06 n	$0.91\,n$	$0.54\,n$
Minimum $\Delta s_i(\tau)$	$-1.00n$	$0.03\,n$	$-0.47\,n$
Maximum $\Delta s_i(\tau)$	$0.03\,n$	$1.00\,n$	$0.47\,n$
Durchschnitt $\Delta s_i(\tau)$	0	0	0
$\sigma(\Delta s_i(\tau))$	$0.01\,n$	$0.58\,n$	$0.26\,n$
Werteanzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$	$0.25\,n$	$3.4\,n$	$1.95\,n$
Minimum $\Delta s_{ik}(\tau)$	0	0	0
Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$	$0.25\,n$	$3.41\,n$	$1.99\,n$
Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$	$0.06\,n$	$1.19\,n$	$0.66\,n$
$\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$	0	$0.86\,n$	klein
Werteanzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	$0.06\,n$	$2.95\,n$	$1.05\,n$
Minimum $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	0	0
Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	$0.06\,n$	$2.98\,n$	$1.10\,n$
Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	$0.01\,n$	$0.96\,n$	$0.29\,n$
$\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$, $J_{ik} \neq 0$	$0.01\,n$	$0.72\,n$	$0.21\,n$

Tabelle 6: Geschätzte Gesetzmäßigkeiten für die vermuteten linearen Zusammenhänge zwischen den beobachteten Größen und der Netzgröße

Im Vergleich zu Netzwerkgesetz 1 ist die durchschnittliche Anzahl verschiedener Knotenwerte im Mittel deutlich größer wohingegen die Minimal- und Maximalwerte ziemlich ähnlich erscheinen, siehe Abbildung 34(a).

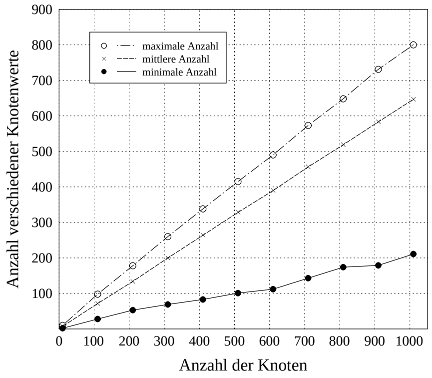
Der Durchschnitt der Knotenwerte ist bei den hier gewählten Anfangsbedingungen zu Beginn 0, da alle Knoten am Anfang den Wert 0 zugewiesen bekommen. Da er aber unter der Netzwerkdynamik erhalten bleibt, ist er stets identisch 0 und wurde deshalb nicht dargestellt.

Die Standardabweichung der Knotenerte vom Mittelwert 0 liegt etwas höher als bei Netzwerkgesetz 1, vergleiche Abbildung 34(d). Sowohl die größere Multiplizität der auftretenden Knotenwerte als auch die größere Standardabweichung vom Mittelwert sind mit der Intuition vereinbar, daß Netzwergesetz 2 durch Abschalten von Bonds, also Wechselwirkungsmöglichkeiten, bei *großen Zustandsdifferenzen* eben solch großen Differenzen konserviert und diese deshalb häufiger auftreten.

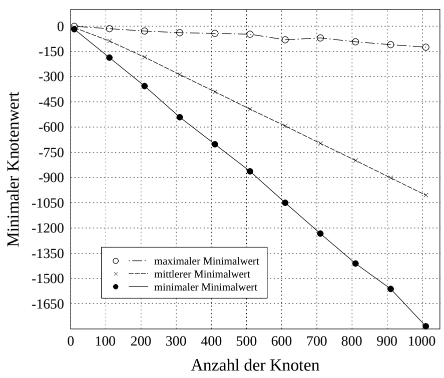
Bei den zeitlichen Schwankungen $\Delta s_i(\tau)$ sind schon deutlichere Unterschiede erkennbar. Im Mittel ist die Anzahl verschiedener $\Delta s_i(\tau)$ größer, das Minimum, Maximum und die Standardabweichung sind aber weniger extrem als bei Netzwerkgesetz 1. Bei solchen Aussagen muß man jedoch sehr vorsichtig sein. Diese Beobachtung hängt stark von dem als relevant betrachteten λ_1/λ_2 Parameterbereich ab, über den gemittelt wird. Bei dieser Untersuchung wurde über alle Kombinationen $\lambda_1 = 1 + 25k$ und $\lambda_2 = 1 + 25l$, $l \geq k \in \mathbb{N}$, gemittelt, die auf eine nicht-triviale Dynamik ("Einfrieren") führen, vergleiche auch 33.

Bei den räumlichen Schwankungen $\Delta s_{ik}(\tau)$ liegen alle Werte ein wenig höher als bei Netzwerkgesetz 1. Weiterhin ist die Besonderheit, daß die Standardabweichung σ für große Knotenzahlen n wieder absinkt, hier im Gegensatz zu Netzwerkgesetz 1 nicht vorhanden.

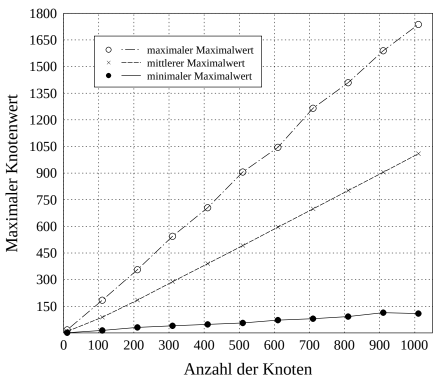
Die räumlichen Schwankungen zwischen verbundenen Knoten verhalten sich natürlich signifikant anders als bei Netzwerkgesetz 1, da gerade hier das verwen-



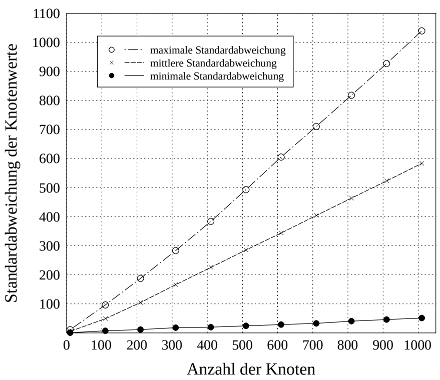
(a) Anzahl verschiedener Knotenwerte



(b) Minimum der Knotenwerte



(c) Maximum der Knotenwerte



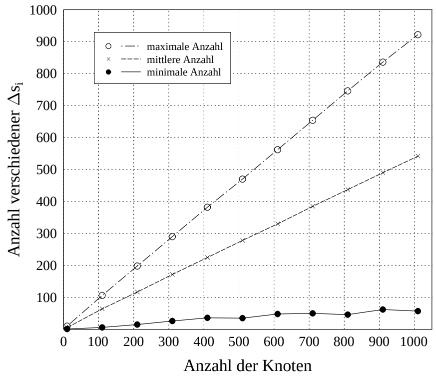
(d) Standardabweichung der Knotenwerte

Abbildung 34: Multiplizität, Minimum, Maximum und Durchschnittswert der Knotenwerte in Abhängigkeit von der Netzgröße

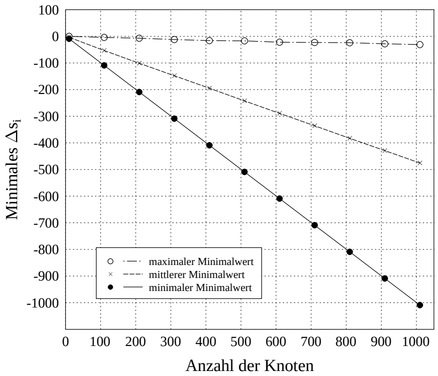
dete Netzwerkgesetz ganz offensichtlich eine große Rolle spielt. Netzwerkgesetz 2 bevorzugt Verbindungen zwischen Knoten mit kleiner Zustandsdifferenz $\Delta s_{ik}(\tau)$. Aus diesem Grund ist der Minimalwert der räumlichen Schwankungen unter diesem Netzwerkgesetz identisch 0, wie dies ja auch bei den räumlichen Schwankungen zwischen beliebigen Knoten unter beiden Netzwerkgesetzen der Fall ist, nicht jedoch bei den räumlichen Schwankungen zwischen *verbundenen* Knoten unter Netzwerkgesetz 1.

Der maximale Maximalwert der räumlichen Schwankungen liegt ebenso hoch wie bei Netzwerkgesetz 1, im Mittel liegt er aber erkennbar unter dem bei Netzwergesetz 1 beobachteten.

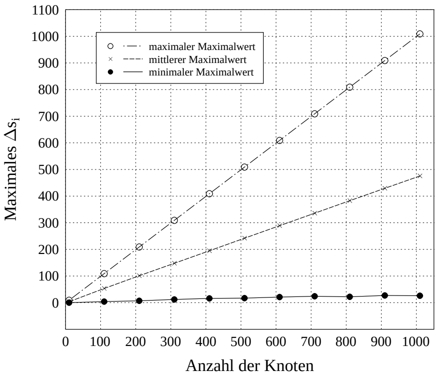
Die durchschnittlich auftretenden räumlichen Schwankungen liegen im Maximum, Minimum und Mittel unter den entsprechenden Werten bei Netzwergesetz 1. Bei der Standardabweichung fehlt wieder der bei Netzwerkgesetz 1 beobachtete Absinkeffekt bei großen n.



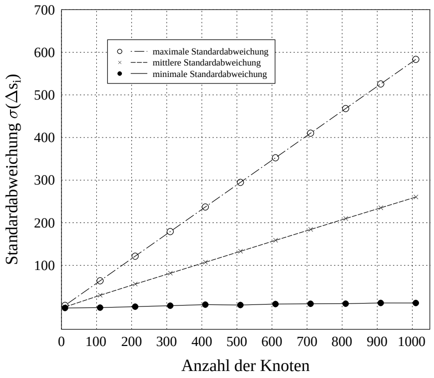
(a) Anzahl verschiedener $\Delta s_i(\tau)$



(b) Minimum der $\Delta s_i(\tau)$

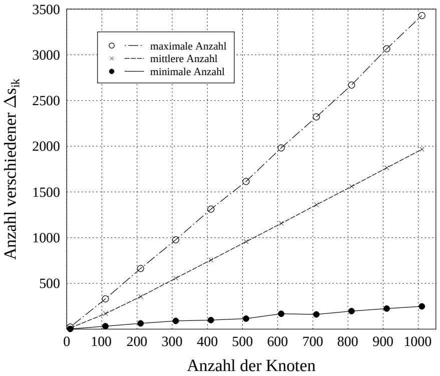


(c) Maximum der $\Delta s_i(\tau)$

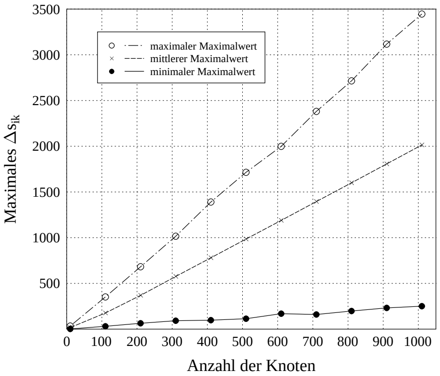


(d) $\sigma(\Delta s_i(\tau))$

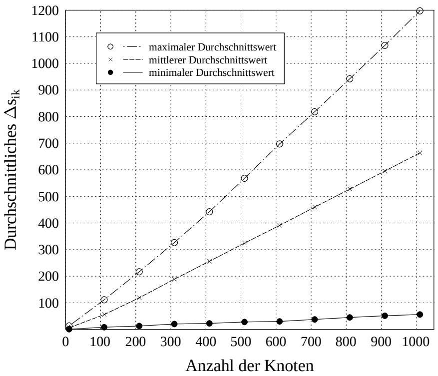
Abbildung 35: Multiplizität, Minimum, Maximum und Standardabweichung vom Durchschnittswert der zeitlichen Schwankungen $\Delta s_i(\tau)$ in Abhängigkeit von der Netzgröße



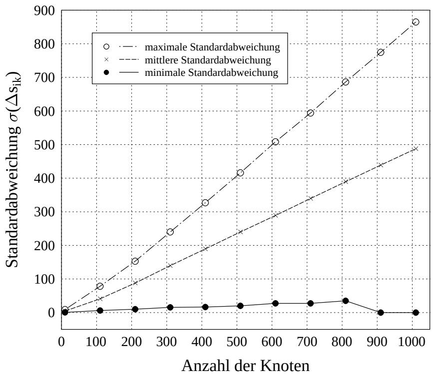
(a) Anzahl verschiedener $\Delta s_{ik}(\tau)$



(b) Maximum der $\Delta s_{ik}(\tau)$

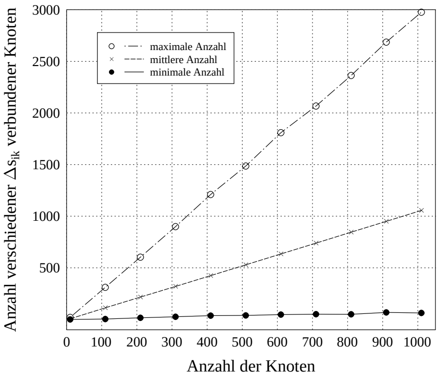


(c) Durchschnitt der $\Delta s_{ik}(\tau)$

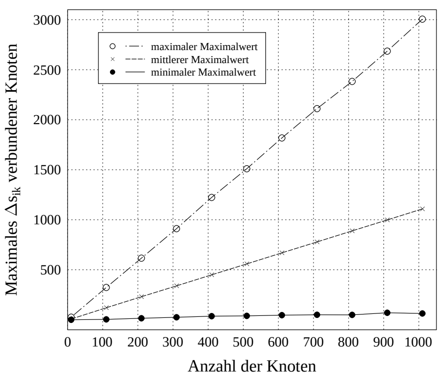


(d) $\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$

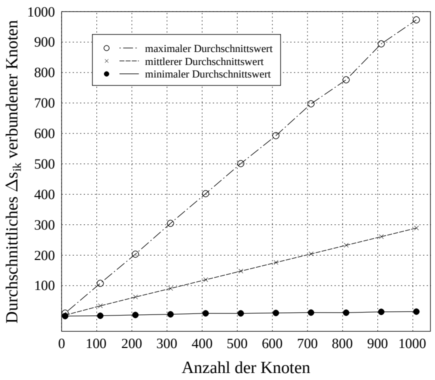
Abbildung 36: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta s_{ik}(\tau)$ in Abhängigkeit von der Netzgröße.



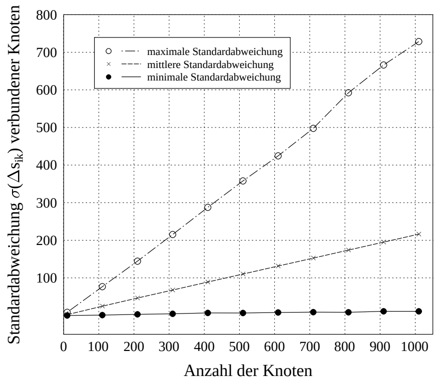
(a) Anzahl $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(b) Maximum $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(c) Durchschnitt $\Delta s_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(d) $\sigma(\Delta s_{ik}(\tau))$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

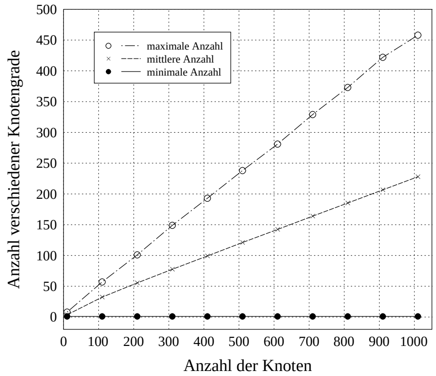
Abbildung 37: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta s_{ik}(\tau)$ zwischen *verbundenen* Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.

Untersuchte Größe	Min.	Max.	Mittel
Werteanzahl $\deg_i(\tau)$	1	$0.45\,n$	$0.23\,n$
Minimum $\deg_i(\tau)$	0	$1.00\,n$	$0.31\,n$
Maximum $\deg_i(\tau)$	$0.09\,n$	$1.00\,n$	$0.68\,n$
Durchschnitt $\deg_i(\tau)$	$0.06\,n$	$1.00\,n$	$0.55\,n$
$\sigma(\deg_i(\tau))$	0	$0.26\,n^*$	$0.08\,n$
Anzahl abgeschalteter Bonds	0	$0.47\,n^2$	$0.27\,n^2$
Geschätztes p	0.07	1	0.55
Werteanzahl $\Delta\deg_i(\tau)$	1	$0.57\,n^*$	$0.24\,n$
Minimum $\Delta\deg_i(\tau)$	$-0.8\,n$	$0.15\,n$	$-0.17\,n$
Maximum $\Delta\deg_i(\tau)$	$-0.42\,n$	$0.70\,n$	$0.18\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_i(\tau)$	$-0.53\,n$	$0.37\,n$	klein
$\sigma(\Delta\deg_i(\tau))$	0	$0.27\,n^*$	$0.07\,n$
Werteanzahl $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	1	$0.98\,n^*$	$0.36\,n$
Minimum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	0	0
Maximum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	$1.00\,n$	$0.37\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_{ik}(\tau)$	0	$0.23\,n$	$0.09\,n$
$\sigma(\Delta\deg_{ik}(\tau))$	0	$0.30\,n$	$0.08\,n$
Werteanzahl $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	1	$0.91\,n$	$0.32\,n$
Minimum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	0	0
Maximum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	$1.00\,n$	$0.34\,n$
Durchschnitt $\Delta\deg_{ik}(\tau)$, $J_{ik} \neq 0$	0	$0.19\,n$	$0.07\,n$
$\sigma(\Delta\deg_{ik}(\tau))$, $J_{ik} \neq 0$	0	$0.17\,n$	$0.06\,n$

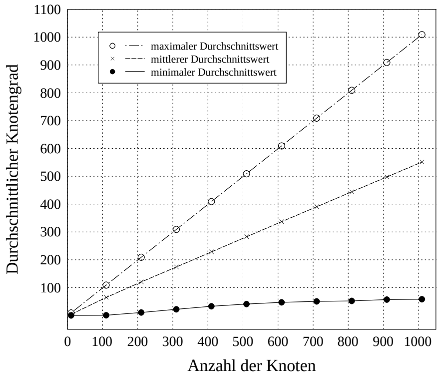
Tabelle 7: Geschätzte Gesetzmäßigkeiten für die vermuteten linearen Zusammenhänge zwischen den beobachteten Größen und der Netzgröße.

6.1.2 Bemerkungen zu den Knotengraden

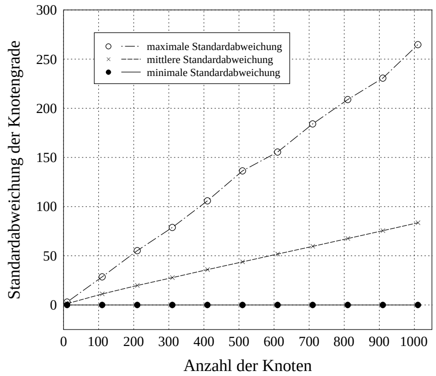
Auch hier tut sich nicht weltbewegend viel neues. Die Ergebnisse sind in Abbildung 38 - 41. Der Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen bei Netzwerkgesetz 1 sei dem Leser überlassen.



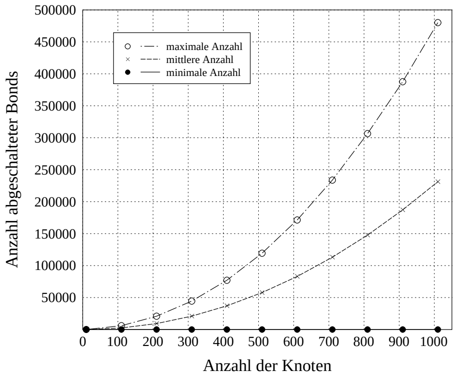
(a) Anzahl verschiedener Knotengrade



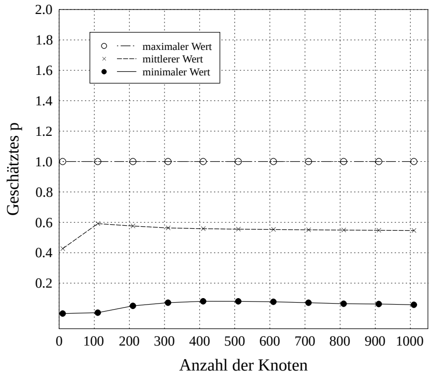
(b) Durchschnitt der Knotengrade



(c) Standardabweichung der Knotengrade

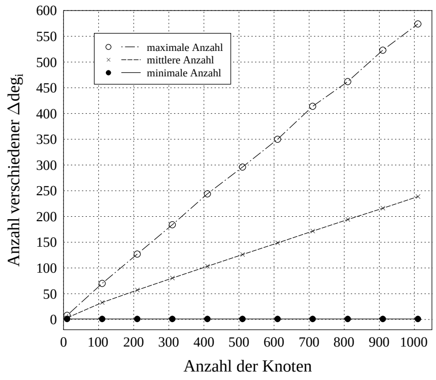


(d) Anzahl abgeschalteter Bonds

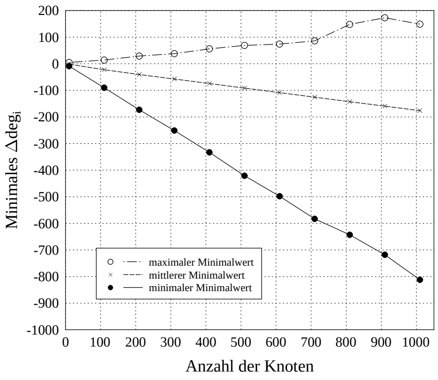


(e) Geschätzte "An-Wahrscheinlichkeit" p

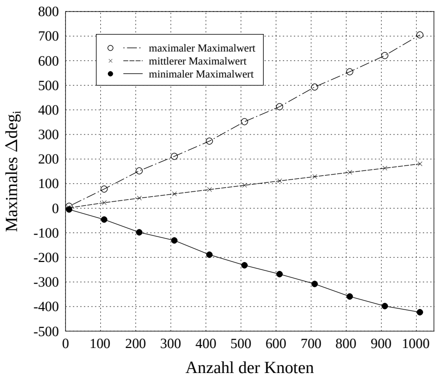
Abbildung 38: Multiplizität, Durchschnitt, Standardabweichung der Knotengrade, Anzahl der abgeschalteten Bonds und geschätzte Wahrscheinlichkeit für einen Bond, "an" zu sein.



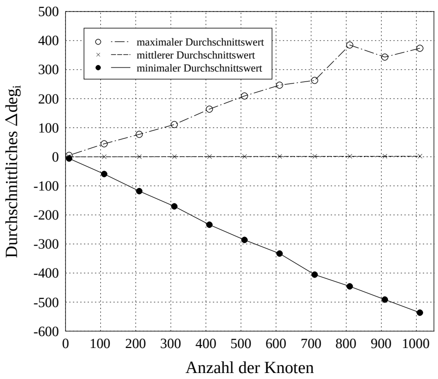
(a) Anzahl $\Delta \mathrm{deg}_i(\tau)$



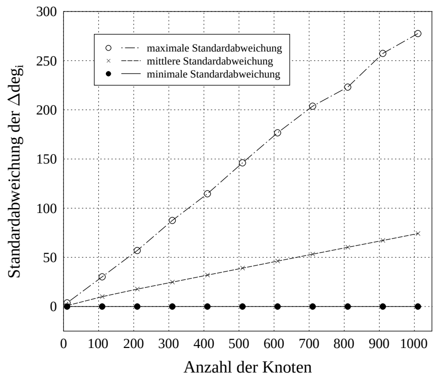
(b) Minimum $\Delta \mathrm{deg}_i(\tau)$



(c) Maximum $\Delta \mathrm{deg}_i(\tau)$

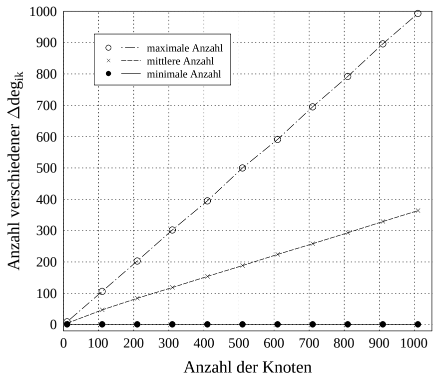


(d) Durchschnitt $\Delta \mathrm{deg}_i(\tau)$

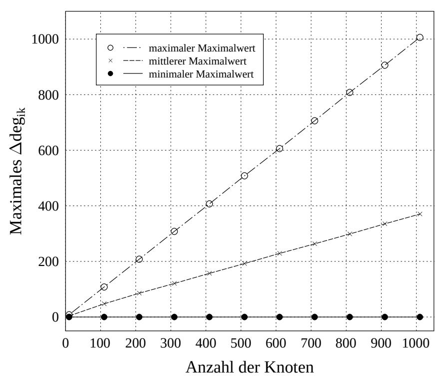


(e) $\sigma(\Delta \mathrm{deg}_i)(\tau)$

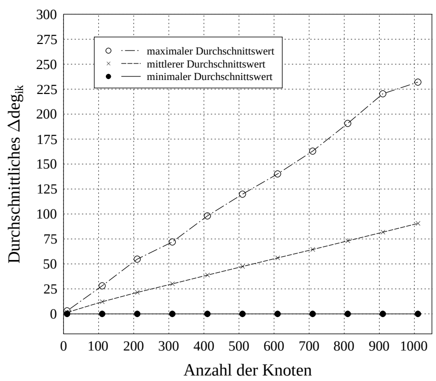
Abbildung 39: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der zeitlichen Schwankungen $\Delta deg_i(\tau)$ an den Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.



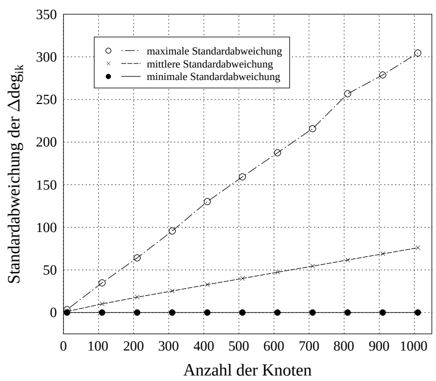
(a) Anzahl $\Delta \text{deg}_{ik}(\tau)$



(b) Maximum $\Delta \text{deg}_{ik}(\tau)$

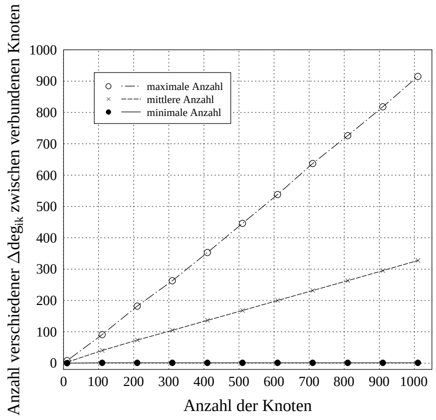


(c) Durchschnitt $\Delta \text{deg}_{ik}(\tau)$

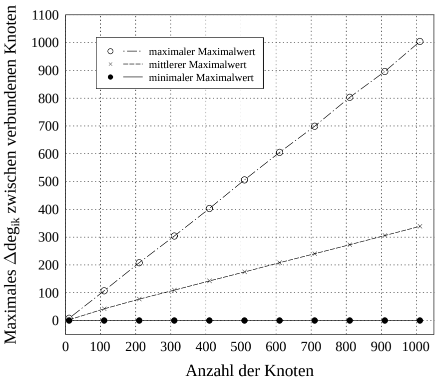


(d) $\sigma(\Delta \text{deg}_{ik})(\tau)$

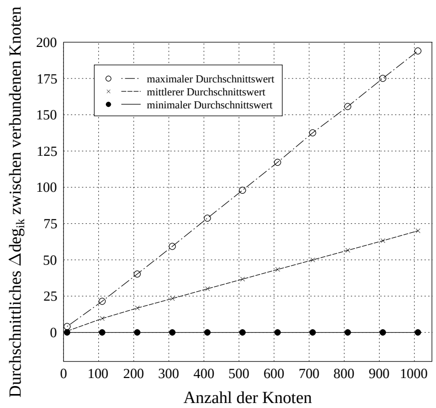
Abbildung 40: Multiplizität, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta deg_{ik}(\tau)$ zwischen Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße. Auf die Darstellung der Minimalwerte wurde verzichtet, da die Extrema und der Durchschnitt dieser Minimalwerte stets identisch Null waren.



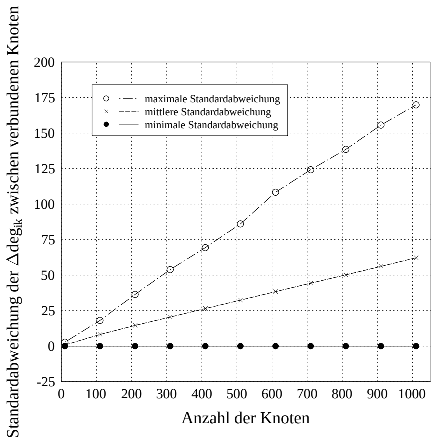
(a) Anzahl $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(b) Maximum $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(c) Durchschnitt $\Delta\deg_{ik}(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$



(d) $\sigma(\Delta\deg_{ik})(\tau)$ mit $J_{ik}(\tau) \neq 0$

Abbildung 41: Multiplizität, Minimum, Maximum, Durchschnitt und Standardabweichung der räumlichen Schwankungen $\Delta deg_{ik}(\tau)$ zwischen *verbundenen* Knoten in Abhängigkeit von der Netzgröße.

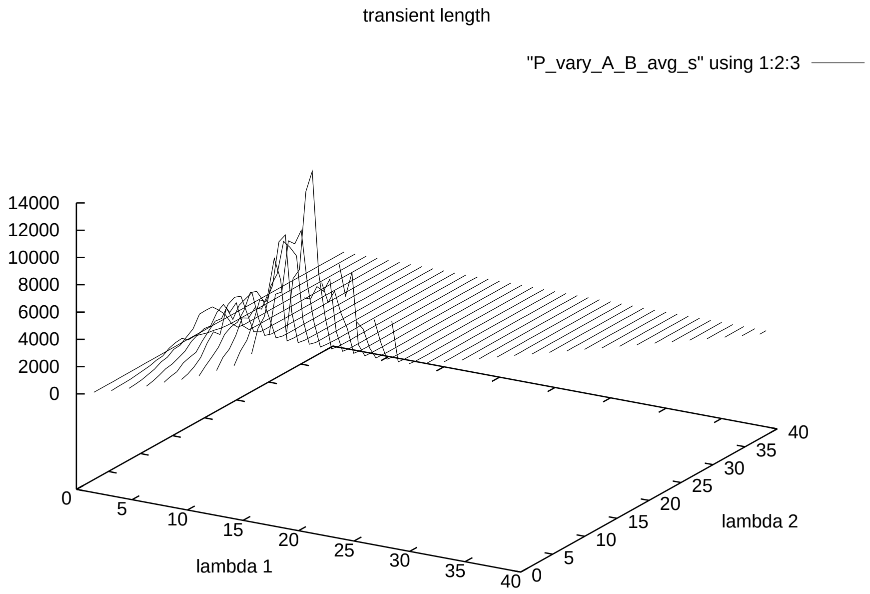


Abbildung 42: Transientenlänge in Abhängigkeit von λ_1 und λ_2 für ein Netz der Größe $n = 10$

6.2 Zykel- und Transientenlängen

Die Zykel- und Transientenlängen sind bei diesem Nwetzwerkgesetz dramatisch anders. Bei bestimmten Parametereinstellungen werden sowohl die Zykel als auch die Transienten extrem lang. Abbildung 42 und 43 zeigen ein typischen Ergebnis für ein Netzwerk mit $n = 10$ Knoten.

Mit wachsender Knotenzahl sprengt die Transientenlänge bald alle Rechenzeit und Speicherbeschränkungen des verwendeten Rechnertyps (DEC - Alpha workstations und Pentium PCs). Eine Darstellung aller erreichten Ergebnisse liegt als Anlage C bei.

6.3 Knotenwerte

Auf diese Ergebnisse kann ich aus Zeitgründen nicht präziser eingehen. Es liegt die Darstellung aller Ergebnisse, als Anlage B bezeichnet, bei.

6.4 Knotengrade

Hier gilt dasselbe wie für die Knotenwerte.

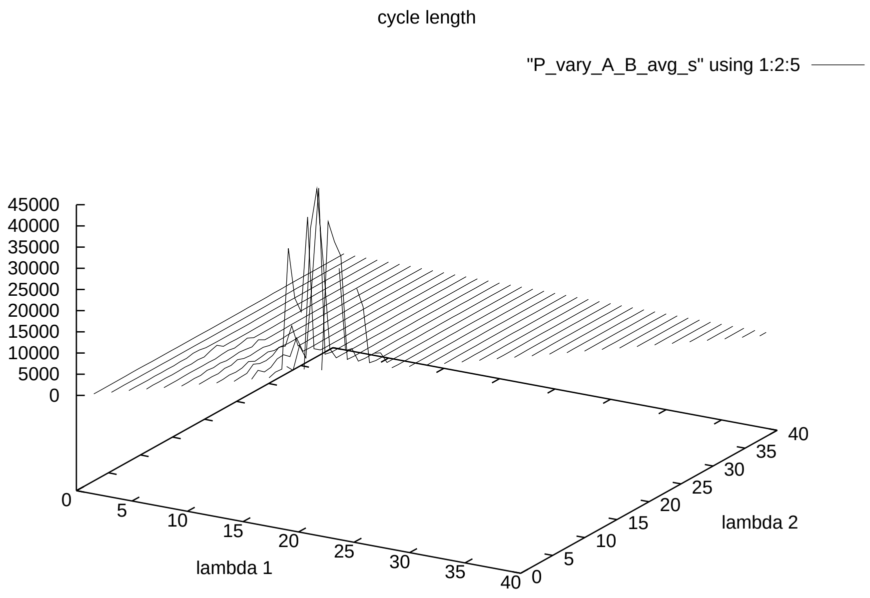


Abbildung 43: Zykellänge in Abhängigkeit von λ_1 und λ_2 für ein Netz der Größe $n = 10$

7 Kurze Zusammenfassung der sonst noch ausgeführten/ zur Ausführung programmierten Untersuchungen

In der folgenden Liste sind alle mehr oder weniger intensiv untersuchten Eigenschaften der Netzwerk Systeme aufgelistet. Die Darstellung folgt direkt den Namen der entsprechenden Objekte des objektorientierten Programmcodes der Simulation. Auch die zu den oben geschilderten Beobachtungen führenden Observablen sind nochmals aufgelistet. Die erste Bezeichnung ist der Name des C++ - Objekts, in Klammern folgt das Kennwort zur Verwendung in einer Initialisierungsdatei.

- *observ_comps ("components")*:
  - Einfache Observable:
    - number of components
    - average component size
    - spatial standard deviation from the mean of component sizes
  - Mengen-Observable:
    - component sizes (no. of appearances of various component sizes)
- *observ_ndvals ("node_values")*:
  - Einfache Observable:
    - number of distinct node values
    - average node value (average over nodes)
    - standard deviation from the average of node values
    - maximum node value (max of all nodes)
    - minimum node value (min of all nodes)
  - Mengen-Observable:
    - node values (no. of appearances of the various values)
- *observ_nddeg ("node_degrees")*:
  - Einfache Observable:
    - number of distinct node degrees
    - average node degree (average over all nodes)
    - standard deviation from the average node degree
    - number of edges which are switched off
    - fraction of the active bonds as an estimation for the probability for a bond being on
  - Mengen-Observable:
    - node degrees (no. of appearances of the various node degrees)
- *observ_subsimpli ("subsimplices")*:
  - Einfache Observable:
    - number of maximal subsimplices (max. in the sense that any additional vertex would not allow the subgraph in question to be a subsimplex, but given any node of the subsimplex there might be still larger max. subsimplices containing that given node)

    * average size of subsimplices (averaged over the subsimplices counted above)
  - Mengen-Observable:
    * size of the max. subsimplices (no. of appearances of the sizes, the total number of observed sizes is likely to exceed the number of nodes by far as all max. subsimplices containing any given node are accounted for)

  WARNING: The calculation time for this observable grows exponentially with the size of the network

- *observ_rd_ss ("random_subsimplices")*:
  - Einfache Observable:
    * number of observed max. subsimplices, restricted by a given upper bound, the subsimplices observed are searched randomly
    * average size of max. subsimplices (averaged over all subsimplices found without breaking the upper bound of simplices per node mentioned above)
  - Mengen-Observable:
    * sizes of max. subsimplices (the no. of appearances of different sizes within the subsimplices found)
- *observ_simplex_size ("subsimplex_size")*:
  - Einfache Observable:
    * size of the max. max. subsimplices around a given node
    * size of the min. max. subsimplices around a given node
- observ_cycle ("cycles"):
  - Einfache Observable:
    * transient length
    * cycle length
    * number of detected cycles (1 or 0 depending on whether a cycle was detected or the upper limit for the transient/cycle length was breached)

  WARNING:
  - The calculation times can grow extremely fast with the size of the network
  - the upper limits for the transient- and cycle length must be given in the initialization file and detremine the size of the running program.
- *observ_flucts ("fluctuations")*:
  - Einfache Observable:
    * number of different fluctuations (= difference between node states) only between nodes n_i and n_k with $i < k$
    * min. fluctuation size
    * max. fluctuation size
    * average fluctuation size

    - stadard deviation of fluctuation sizes from the average fluctuation size
  - Mengen-Observable:
    - fluctuations sizes (no. of appearances of the various sizes)

- *observ_bond_correl ("bond_correlations")*:
  - Einfache Observable:
    - correlation coefficient for the correlation between bond 0 to x and 0 to y where x and y are numbers of nodes given in the ini-file. There also a time offset range is given (0-k) so that values of $b_{0x}(t)$ are correlated with those of $b_{0y}(t+c)$, $c \in \{0, \ldots, k\}$

  WARNING: This observable only makes sense as a time-average as then the observed quatity is an estimation for the correlation coefficient otherwise it is more or less meaningless

- *observ_dsis ("delta_s_i")*:
  - Einfache Observable:
    - number of distinct values of Δs_i
    - average value
    - stadard deviation of the Δs_i from the average value
    - max. Δs_i (max. over all nodes)
    - min. Δs_i (min. over all nodes)
  - Mengen-Observable:
    - values of Δs_i (no. of appearances of the various values)

- *observ_dsi_correl ("dsi_correlations")*:
  - Einfache Observable:
    - correlation coefficients between $\Delta s_x(t)$ and $\Delta s_y(t+c)$ similar as between bonds in *observ_bond_correl*

- *observ_dsi ("dsi")*:
  - Einfache Observable:
    - Δs_i for one i (determined within the initialization file)
  - Mengen-Observable:
    - Δs_i for one i as above but as a set of no. of occurences of various values

- *observ_node ("node")*: As *observ_dsi* but for node values.

- *observ_bond ("bond")*: As *observ_dsi* but for bond values

- *observ_degree ("degree")*: As *observ_dsi* but for degree values

- *observ_hamming ("hamming")*:
  - Einfache Observable:
    - hamming distance between network states with respect to node values (distance to a reference net with slightly different initial state
    - hamming distance with respect to bond states

WARNING: This was never really worked out and tested, probably needs some redoing before useful

- *observ_conn_flucts ("connected fluctuations")*:
  - Einfache Observable:
    - number of distinct fluctuation sizes between connected nodes
    - min. fluctuation size ...
    - max. fluctuation size ...
    - average fluctuation size ...
    - standard deviation ...
  - Mengen-Observable:
    - fluctuation sizes (no. of appearance of the values)
- *observ_deg_flucts ("degree fluctuations")*: As *observ_flucts* but for degrees rather than node values
- *observ_conn_deg_flucts ("connected_degree_fluctuations")*: As *observ_conn_flucts* but for degrees instead of node values
- *observ_ddegi ("delta_degree")*: As *observ_delta_s_i* but for $\Delta deg_i = deg_i(\tau + 1) - deg_i(\tau)$.